The original page images used in this edition were obtained from the University of Michigan Library's digital collection, "Historical Mathematics Monographs," made available through the HathiTrust Digital Library and accessible via the Quod Libet interface:
https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/AAN9527.0003.001
Transcribed by Steven Thomas Hatton using ChatGPT 5.2

IX.
RICERCHE DI ANALISI APPLICATA ALLA GEOMETRIA.

Giornale di Matematiche, vol. II (1864), pp. 267–282, 297–306, 331–339, 355–375;
vol III (1865), pp. 15–22, 33–41, 82–91, 228–240, 311–314.

I.

Consideriamo un sistema di linee a doppia curvatura, distribuite nello spazio in modo che per ciaschedun punto ne passi una sola od al più un numero finito. Le equazioni di una delle curve appartenenti a questo sistema si potranno supporre ridotte alla forma:

$$\xi = \xi(t,u,v), \qquad \eta = \eta(t,u,v), \qquad \zeta = \zeta(t,u,v), \tag{1}$$

dove u e v sono due parametri arbitrarî il cui valore serve ad individuare le singole curve, e t è una variabile che definisce i punti di ciascuna curva in particolare; ξ, η, ζ sono le coordinate correnti, che supponiamo ortogonali.

Cerchiamo la condizione che deve essere soddisfatta dalle funzioni ξ, η, ζ affinché esista una superficie che incontri normalmente tutte queste curve.

Se nelle equazioni (1) si sostituisce al posto di t una funzione determinata di u e di v, le equazioni stesse rappresenteranno un punto (od al più una serie discontinua di punti) della linea (u,v), e variando u e v in tutti i modi possibili si otterrà un sistema continuo di punti, costituente una superficie. Le u e v fanno l'ufficio di coordinate curvilinee (Gaussiane) rispetto a questa superficie, e le proiezioni di un suo ele-

Transcribed using ChatGPT 5.2

mento lineare sui tre assi sono

$$\begin{cases} d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}\,dt + \dfrac{\partial \xi}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial \xi}{\partial v}\,dv, \\ d\eta = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}\,dt + \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\,dv, \\ d\zeta = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}\,dt + \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}\,dv, \end{cases} \tag{2}$$

dove si deve intendere sostituita per t una funzione di u e di v.

Per il punto (ξ, η, ζ) di questa superficie passa una linea del sistema (1), che ha ivi per tangente una retta la quale fa coi tre assi angoli i cui coseni sono proporzionali alle quantità

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Affinché questa retta coincida colla normale alla superficie testé considerata, è necessario e sufficiente che si abbia, per ogni valore di u e di v,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\,d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial t}\,d\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\,d\zeta = 0,$$

ossia, ponendo per brevità

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 = T,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial u} = U,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial v} = V,$$

ed osservando le (2),

$$T\,dt + U\,du + V\,dv = 0. \tag{3}$$

Perchè esista la superficie ortogonale bisogna dunque che si possa assegnare una funzione di u e di v tale, che messa al posto di t in quest'ultima equazione, la renda identicamente soddisfatta; e reciprocamente, se esiste una tal funzione, esiste anche la superficie ortogonale. In altre parole, è necessario e sufficiente che l'equazione differenziale totale (3) possa essere integrata per mezzo di una *una sola relazione* finita fra le t, u, v, ossia che risulti soddisfatto il noto criterio d'integrabilità dei differenziali a tre variabili

$$T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0. \tag{4}$$

Tale è la condizione dell'esistenza di una superficie ortogonale alle linee (1). Giova distinguere tre casi:

1°) Quando l'equazione (4) è identica, l'equazione (3) ha un integrale finito con una costante arbitraria, epperò le superficie ortogonali sono in numero infinito;

2°) Quando l'equazione (4) non è identica, ma stabilisce fra le t, u, v una relazione che soddisfa all'equazione differenziale (3), questa non possiede che un integrale particolare, che è la stessa equazione (4), epperò non esiste che una sola superficie ortogonale;

3°) Finalmente, se non si verifica alcuno dei due casi precedenti, non esiste alcuna superficie ortogonale e quindi il problema non ammette soluzione.

Nei primi due casi l'equazione ordinaria in ξ, η, ζ della superficie ortogonale si ottiene eliminando le t, u, v fra le equazioni (1) e l'integrale dell'equazione (3).

II.

L'equazione (4) si semplifica alquanto allorchè la variabile t è l'arco della linea (u, v), contato da un certo punto, che si può considerare come l'intersezione della linea stessa con una superficie iniziale arbitraria, la cui equazione si otterrebbe ponendo $t = 0$ nelle (1) ed eliminando u, v. In questa ipotesi si ha $T = 1$, e la condizione (4) assume la forma più semplice

$$\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} + U\frac{\partial V}{\partial t} - V\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Questa circostanza si verifica particolarmente nel caso, degno di speciale considerazione, in cui le linee del sistema (1) sieno rette. Infatti le equazioni (1) assumono allora la forma:

$$\begin{cases} \xi = x + tX, \\ \eta = y + tY, \\ \zeta = z + tZ, \end{cases} \tag{6}$$

dove X, Y, Z sono i coseni degli angoli che la retta (u, v) fa coi tre assi; x, y, z sono le coordinate del punto d'intersezione della retta variabile colla superficie iniziale, t la porzione di retta compresa fra questa superficie e il punto (ξ, η, ζ). Le sei quantità x, y, z, X, Y, Z sono funzioni determinate delle due variabili u e v.

In questo caso si ha

$$\begin{cases} U = X\dfrac{\partial x}{\partial u} + Y\dfrac{\partial y}{\partial u} + Z\dfrac{\partial z}{\partial u}, \\ V = X\dfrac{\partial x}{\partial v} + Y\dfrac{\partial y}{\partial v} + Z\dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

per cui la condizione (5) diventa semplicemente

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}, \tag{8}$$

od anche, sostituendo i valori (7) e riducendo

$$\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \tag{9}$$

La condizione dell'esistenza di una superficie normale ad un sistema di rette venne data sotto questa forma dal sig. KUMMER[*)].

Si può supporre invece che i coseni X, Y, Z sieno dati in funzione delle coordinate x, y, z del punto in cui la retta incontra la superficie iniziale; in questo caso, esprimendo le derivate di X, Y, Z rispetto ad u, v per quelle rispetto ad x, y, z, si ottiene

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0,$$

ossia, rappresentando con $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie iniziale, ed osservando che si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Se la superficie iniziale $F = 0$ si considera come data, quest'equazione, combinata colla $F = 0$, è la condizione cui devono soddisfare le funzioni X, Y, Z, affinchè le rette che partono da quella superficie formino il sistema delle normali di una medesima superficie.

[*)] *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVII (1860), pag. 189].

superficie. Ma se, col sig. ABEL TRANSON[*], si considerano le x, y, z come le coordinate di un punto *qualunque* dello spazio, e la funzione F come indeterminata, essendo infiniti i valori di questa funzione che possono soddisfare all'equazione (10), è chiaro che esistono sempre, ed in numero infinito, superficie dotate della proprietà di contenere i punti di partenza di un sistema di rette normali ad una stessa superficie. Ritorneremo in seguito su questa questione.

Se, attenendoci alla prima ipotesi, supponiamo già eliminata la z dalle funzioni X, Y, Z per mezzo dell'equazione $F = z - z(x, y) = 0$, la (10) diventa

$$\frac{\partial X}{\partial y} + p\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} + q\frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

od anche

$$\frac{\partial}{\partial y}(X + pZ) = \frac{\partial}{\partial x}(Y + qZ).$$

A questa formula, dalla quale reciprocamente potrebbe ricavarsi la (10), pervenne il sig. DIEU[**]. Essa trovasi anche nell'eccellente *Traité de calcul différentiel* del sig. BERTRAND, § 648.

L'equazione (8) esprime, come è notissimo, che l'espressione $U\,du + V\,dv$ è il differenziale esatto di una funzione delle due variabili u e v. Dalle (7) si ha poi

$$U\,du + V\,dv = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

. cosicchè l'esistenza di una superficie ortogonale richiede che quest'ultimo trinomio possa divenire, mercè l'equazione in x, y, z della superficie iniziale, il differenziale esatto di una funzione di due variabili indipendenti. Questa proprietà si può interpretare geometricamente, come può vedersi nel citato libro del sig. BERTRAND.

III.

Supponiamo che la condizione (8) sia identicamente soddisfatta e che esista quindi una funzione $\varphi(u, v)$ tale che si abbia

$$U\,du + V\,dv = d\varphi$$

cioè

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad V = \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \tag{11}$$

[*] Journal de l'École Polytechnique, tome XXII, cahier 38 (1861), pag. 195; Nouvelles Annales de Mathématiques (2me série), t. II (1863), pag. 138.

[**] Nouvelles Annales de Mathématiques, tomo XI (1852), pag. 68.

È chiaro che anche il binomio $U'\,du + V'\,dv$ sarà un differenziale esatto se si prenderà

$$U' = U \cdot F(\varphi), \qquad V' = V \cdot F(\varphi), \tag{12}$$

dove F è simbolo di funzione arbitraria. Ora, qualunque sia questa funzione, è chiaro che si potrà sempre determinare un secondo sistema di rette, che diremo sistema derivato e che rappresenteremo colle equazioni

$$\xi = x + tX',$$

$$\eta = y + tY',$$

$$\zeta = z + tZ',$$

in modo che risultino soddisfatte le relazioni

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1,$$

$$X'\frac{\partial x}{\partial u} + Y'\frac{\partial y}{\partial u} + Z'\frac{\partial z}{\partial u} = U.F(\varphi),$$

$$X'\frac{\partial x}{\partial v} + Y'\frac{\partial y}{\partial v} + Z'\frac{\partial z}{\partial v} = V.F(\varphi).$$

Abbiamo così un modo di ricavare da un sistema di rette, normali ad una medesima superficie, infiniti altri sistemi dotati della stessa proprietà. Cerchiamo di conoscere la connessione che questi nuovi sistemi hanno, sotto l'aspetto geometrico, col sistema primitivo.

Poniamo per brevità $\varkappa$ in luogo di $F(\varphi)$; sostituendo nelle (12) ad U, V, U', V' i loro valori, si ha

$$\begin{cases} (X' - \varkappa X)\dfrac{\partial x}{\partial u} + (Y' - \varkappa Y)\dfrac{\partial y}{\partial u} + (Z' - \varkappa Z)\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ (X' - \varkappa X)\dfrac{\partial x}{\partial v} + (Y' - \varkappa Y)\dfrac{\partial y}{\partial v} + (Z' - \varkappa Z)\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Le quantità $X' - \varkappa X,\ Y' - \varkappa Y,\ Z' - \varkappa Z$ sono evidentemente proporzionali ai coseni degli angoli formati coi tre assi da una certa retta giacente nel piano delle due rette (X, Y, Z), (X', Y', Z'). Le due equazioni precedenti esprimono matematicamente che questa retta è normale alla superficie iniziale: epperò due rette corrispondenti del sistema primitivo e di un sistema derivato sono in un medesimo piano colla normale alla superficie iniziale nel punto da cui partono le rette stesse.

Reciprocamente, se due rette corrispondenti qualsivogliano debbono essere in un piano normale alla superficie iniziale, bisogna che esista una funzione $\varkappa$ di u e di v che soddisfaccia alle due equazioni (13), e quindi si deve avere $U' = \varkappa U,\ V' = \varkappa V$. Se ne deduce

$$\frac{\partial U'}{\partial v} = \varkappa \frac{\partial U}{\partial v} + U\frac{\partial \varkappa}{\partial v}, \qquad \frac{\partial V'}{\partial u} = \varkappa \frac{\partial V}{\partial u} + V\frac{\partial \varkappa}{\partial u},$$

epperò, affinchè il sistema derivato sia normale ad una superficie, del pari che il primitivo, si deve avere

$$U\frac{\partial \varkappa}{\partial v} = V\frac{\partial \varkappa}{\partial u}.$$

L'integrazione di quest'equazione alle derivate parziali dà, in virtù delle (11), $\varkappa = F(\varphi)$. Dunque: se i due sistemi debbono essere formati dalle normali a due superficie, e se due rette corrispondenti qualsivogliano debbono giacere in un piano normale alla superficie iniziale, la relazione più generale fra i due sistemi è data dalle (12).

Indichiamo con θ e θ' gli angoli che le due rette precedenti fanno colla normale alla superficie iniziale, e poniamo, come al solito,

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta^2.$$

I coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale alla superficie iniziale fa coi tre assi sono dati dalle formule

$$\cos\lambda = \frac{A}{\Delta}, \qquad \cos\mu = \frac{B}{\Delta}, \qquad \cos\nu = \frac{C}{\Delta};$$

sostituendo questi valori nella nota formula

$$\operatorname{sen}^2\theta = \left(Y\cos\nu - Z\cos\mu\right)^2 + \left(Z\cos\lambda - X\cos\nu\right)^2 + \left(X\cos\mu - Y\cos\lambda\right)^2,$$

si trova facilmente

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{EV^2 - 2FUV + GU^2}{EG - F^2}. \tag{14}$$

Analogamente si troverebbe

$$\operatorname{sen}^2\theta' = \varkappa^2 \frac{EV^2 - 2FUV + GU^2}{EG - F^2},$$

ossia, ricordando il valore di $\varkappa$,

$$\operatorname{sen}\theta' = \pm F(\varphi)\operatorname{sen}\theta. \tag{15}$$

Di qui vediamo che fra le rette corrispondenti dei due sistemi sussiste una seconda relazione: cioè che *il rapporto fra i seni degli angoli che esse formano colla normale alla superficie iniziale non dipende che dal valore della funzione* φ.

Reciprocamente se, *ammessa l'esistenza di questa funzione,* cioè ammesso che le rette di un certo sistema sieno normali ad una superficie, si ha un secondo sistema derivato dal primo con queste leggi, che due rette corrispondenti qualsivogliano sieno in un piano normale alla superficie iniziale nel punto in cui la incontrano, e che il rapporto fra i seni degli angoli ch'esse formano colla normale in questo punto varî solamente con φ, anche le rette del secondo sistema saranno tutte normali ad una medesima superficie. Ciò risulta facilmente dai principj esposti.

Quando la funzione $F(\varphi)$ si riduce ad una costante, le due leggi precedenti non differiscono da quelle che caratterizzano la riflessione e la rifrazione (ordinaria) dei raggi luminosi, secondo che questa costante è eguale o differente dall'unità. Perciò risulta dimostrato il celebre teorema di MALUS[*)], generalizzato da DUPIN[**)] , che può enunciarsi così: *se un fascio di raggi, normali ad una medesima superficie, si riflette un numero qualunque di volte, o si rifrange alle superficie di separazione di più mezzi omogenei successivi, esso non cessa mai d'essere formato dalle normali d'una medesima superficie.*

Quando si assume per F una vera funzione di φ, si ottiene un nuovo teorema, che verrà enunciato più sotto.

Se si ammette che la relazione fra θ e θ' debba essere la stessa in ogni punto della superficie iniziale, $F(\varphi)$ deve essere evidentemente una quantità costante. Per ciò che si è dimostrato è dunque chiaro che, nell'ipotesi *che ogni raggio rifratto resti nel piano normale alla superficie rifrangente, la legge della natura è la sola, secondo la quale i raggi rifratti risultino normali ad una medesima superficie, posto che lo sieno i raggi*

[*)] *Mémoire sur l'optique* [Journal de l'École Polytechnique, tome VII, cahier 14 (1808), pag. 1].

[**)] *Applications de Géométrie et de Mécanique*, quatrième Mémoire; Paris, BACHELIER, successeur de M^me^ V. COURCIER, Libraire, 1822, pag. 187.

incidenti. È questo un teorema che venne già dato dal sig. BERTRAND, nell'importante *Mémoire sur la théorie des surfaces*[*], in cui dà pure una dimostrazione del teorema di MALUS-DUPIN. Un'altra elegante dimostrazione di quest'ultimo teorema si può vedere nel suo *Trattato di calcolo differenziale*, § 659.

Quando la condizione (8) è soddisfatta, si ottiene una qualunque delle superficie ortogonali prendendo su ciascun raggio, dal punto in cui esso interseca la superficie iniziale, una porzione $t(u, v)$ data dall'equazione

$$t = \text{cost.} - \varphi(u, v),$$

che si ottiene integrando la (3). Per il sistema derivato nel modo suesposto si avrà

$$t_1 = \text{cost.} - \int F(\varphi)\, d\varphi,$$

quindi nel caso della rifrazione si ha

$$t_1 = \text{cost.} + n\, t,$$

dove n è l'indice di rifrangibilità.

IV.

Consideriamo sulla superficie iniziale tre punti infinitamente vicini, A, B e C, di coordinate (u, v), $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$. La condizione affinchè gli elementi AB, AC sieno perpendicolari fra loro è

$$E\, du\, \delta u + F(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v = 0.$$

Supponiamo che l'arco AB appartenga ad una delle curve comprese nell'equazione $\varphi(u, v) = \text{cost.}$, dove φ è una funzione qualunque di u e di v: si avrà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv = 0,$$

e quindi la direzione dell'elemento AC perpendicolare alla curva $\varphi = \text{cost.}$ si otterrà eliminando il rapporto $\dfrac{du}{dv}$ fra le due precedenti equazioni: in tal modo si ha

$$\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\delta u + \left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\delta v = 0.$$

[*] Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome IX (1844), pag. 133.

Per il punto C passa una curva del sistema $\varphi = \text{cost.}$, in tutti i punti della quale il valore della funzione riceve l'incremento $\delta\varphi$, e si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\delta v = \delta\varphi.$$

Dalle due ultime equazioni si cava

$$\delta u = \frac{\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\delta\varphi}{H^2}, \qquad \delta v = \frac{\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta\varphi}{H^2},$$

dove si è posto per un momento

$$H^2 = E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2.$$

Dalle due ultime formule si ricava

$$E\,\delta u + F\,\delta v = \frac{(EG - F^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\delta\varphi}{H^2},$$

$$F\,\delta u + G\,\delta v = \frac{(EG - F^2)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\delta\varphi}{H^2},$$

da cui finalmente, moltiplicando ordinatamente per $\delta u,\ \delta v$ e sommando,

$$E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2 = \frac{(EG - F^2)\,\delta\varphi^2}{H^2}.$$

Il primo membro di quest'equazione è evidentemente il quadrato della lunghezza AC: indicandola con $\delta\sigma$ si ha quindi

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}\right)^2 = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}. \tag{16}$$

La quantità $\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}$ è il rapporto che passa tra l'incremento $\delta\varphi$ che riceve φ nel passare da una curva alla curva infinitamente vicina, e la distanza normale $\delta\sigma$ di queste due curve nel punto (u, v). Essa presenta, rispetto ad un sistema di curve tracciate in una superficie, la più perfetta analogia con quella quantità che il sig. LAMÉ[*)] ha

[*)] *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859), pag. 6, e le altre Memorie dell'illustre Autore.

così felicemente introdotto nella teoria dei sistemi di superficie sotto il nome di *para -metro differenziale del 1° ordine*. Noi conserveremo perciò questa denominazione alla quantità $\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}$, ossia alla radice quadrata dell'espressione che forma il secondo membro della (16). È inutile far osservare che il suo valore non dipende soltanto, in una superficie data, dalla natura del sistema di curve cui essa appartiene, ma eziandio dalla legge con cui si succedono le curve stesse, ossia dal modo in cui si fa variare il parametro che serve ad individuarle. Così l'equazione $f(\varphi) = \text{cost.}$ rappresenta certamente le medesime curve della $\varphi = \text{cost.}$, ma i loro parametri differenziali ϖ' ed ϖ stanno nella relazione $\varpi' = \varpi f'(\varphi)$, perciò il loro rapporto è costante lungo una stessa curva del sistema, variabile da una curva all'altra.

Il parametro differenziale testé definito rappresenta un ente il cui valore non dipende punto dalla natura delle curve coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$; esso ha quindi la proprietà (facilmente verificabile *a posteriori*) di conservare sempre la medesima *forma*, comunque si muti la disposizione di quelle curve.

Per quei sistemi di curve nei quali la distanza normale di due curve consecutive è costante in ciascuno dei loro punti, il parametro differenziale rimane evidentemente costante lungo una medesima curva e varia soltanto da una curva all'altra. In altre parole esso è funzione soltanto di φ; l'equazione generale, alle derivate parziali, di questi sistemi di curve è quindi la seguente:

$$\frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = f(\varphi). \tag{17}$$

Si potrebbe ridurre all'unità il secondo membro di quest'equazione, sostituendo a φ la funzione $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}$, con che evidentemente non si altererebbe punto la natura delle curve. Ma la conservazione della funzione $f(\varphi)$ è indispensabile ogni volta che occorra tener conto dei parametri differenziali.

La precedente equazione caratterizza, sulle superficie, un genere di parallelismo che si può chiamare *geodetico*. Infatti si può dimostrare facilmente che una qualunque delle famiglie di curve definite da essa non è altro che la serie delle traiettorie ortogonali di un sistema (arbitrario) di linee geodetiche, ovvero la serie delle *sviluppanti geodetiche* della curva inviluppata da tutte le linee geodetiche anzidette. Infatti supponiamo che la superficie sia riferita ad un sistema di coordinate ortogonali, per modo che si abbia $F = 0$. L'equazione (17), senza perdere la sua generalità, assumerà la forma più semplice

$$E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = EG\, f(\varphi).$$

Supponiamo che le curve $u = \text{cost.}$ sieno quelle che costituiscono una delle famiglie φ: basterà per ciò porre $\varphi = u$, e le curve $v = \text{cost.}$ diventeranno in tal modo le trajettorie ortogonali di una (qualunque) delle famiglie di curve definite dalla (17). Ora facendo $\varphi = u$ si ottiene

$$G = EG \cdot f(u),$$

quindi

$$E = \frac{1}{f(u)},$$

ossia

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0;$$

dunque, per un notissimo teorema di GAUSS, le trajettorie sono costituite da una serie di linee geodetiche, come si era asserito.

Quando la superficie è riferita ad un sistema di coordinate isoterme, si ha $F = 0$, $E = G = \lambda(u, v)$, e l'equazione (17) diventa

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = \lambda \cdot f(\varphi).$$

Per una superficie sviluppabile si può prendere $\lambda = 1$, e si ricade così nella nota equazione del parallelismo nel piano[*)].

L'equazione (17) venne data anche da Gauss[**)], che la dedusse dalla trasformazione delle coordinate curvilinee; essa fu recentemente richiamata dal sig. WEINGARTEN[***)], il quale ha osservato come essa corrisponda all'equazione del moto di un punto sopra una superficie, quando sul medesimo non agiscano forze esterne.

V.

Restituiamo a ω il significato che ha nell'equazione (11), ed indichiamo con s l'arco della linea $\varphi = \text{cost.}$; avremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} : \frac{du}{ds} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{dv}{ds} = H$$

e quindi

[*)] Bordoni, *Sul parallelismo* [Atti dell'Istituto Lombardo, vol. I (1858), pag. 209].

[**)] *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. XXII.

[***)] *Ueber die Flächen deren Normalen eine gegebene Fläche berühren* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXII (1863), pag. 61].

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right);$$

da queste formule, chiamando ω l'angolo che la retta (X, Y, Z) fa colla tangente alla curva $\varphi = \text{cost.}$, si deduce

$$\cos\omega = \frac{U\frac{\partial \varphi}{\partial v} - V\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{H}, \tag{18}$$

ossia, per le (11),

$$\cos\omega = 0.$$

Dunque: *le curve $\varphi(u, v) = cost.$ sono incontrate normalmente dalle rette del sistema.*

Non si deve credere che l'esistenza di queste traiettorie ortogonali sia caratteristica dei sistemi di rette normali ad una superficie. Qualunque sia la superficie iniziale, si può sempre tracciare in essa una serie di linee che seghino normalmente le rette di un sistema arbitrario. Questo fatto emerge da considerazioni geometriche che si affaccieranno spontaneamente alla mente del lettore: ma esso risulta immediatamente anche da ciò che qualunque siano le funzioni U e V, esiste sempre un numero infinito di fattori $\frac{1}{\tau}$, funzioni di u e di v, che rendono il primo membro dell'equazione

$$U\,du + V\,dv = 0$$

differenziale esatto di una funzione $\Phi(u, v)$, cosicchè

$$U = \tau\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad V = \tau\frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

epperò

$$U\frac{\partial \Phi}{\partial v} - V\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0,$$

donde consegue, in virtù della (18), che le curve $\Phi = \text{cost.}$ sono incontrate normalmente dalle rette del sistema, benchè non obbediscano a veruna condizione speciale. Ma questa stessa circostanza ci conduce a dare un nuovo enunciato alla condizione perchè esse sieno normali ad una superficie. Infatti, chiamando ϖ_Φ il parametro differenziale della funzione Φ, si ha, rammentando la (14),

$$\operatorname{sen}\theta = \tau\,\varpi_\Phi.$$

Ciò posto, se l'espressione $U\,du + V\,dv$ è un differenziale esatto, è lecito prendere $\tau = 1$; e reciprocamente, se il fattore τ che produce $U\,du + V\,dv = \tau\,d\Phi$ può esser fatto uguale ad 1, quell'espressione è un differenziale esatto. Ora al valore $\tau = 1$ del fattore (quando questo valore è ammissibile), corrisponde una forma φ della funzione Φ per la quale si ha

$$\operatorname{sen}\theta = \varpi_{\Phi}.$$

Possiamo dunque dire che: *affinchè le rette del sistema sieno normali ad una superficie è necessario e sufficiente che le curve tracciate nella superficie iniziale ortogonalmente alle rette stesse, possano essere distribuite in modo che il loro parametro differenziale eguagli in ogni punto il seno dell'angolo che la retta corrispondente fa colla normale alla superficie.*

Richiamandoci in mente la relazione fra due sistemi di rette, derivati l'uno dall'altro nel modo esposto all'art. III, possiamo formulare nel modo che segue la loro dipendenza geometrica:

Le rette del sistema primitivo e di uno qualunque dei sistemi derivati sono incontrate ortogonalmente da una medesima serie di curve tracciate sulla superficie iniziale.

Il rapporto dei seni degli angoli che due rette corrispondenti fanno colla normale a questa superficie nel punto comune, è costante in tutti i punti di una di queste traiettorie e varia soltanto da una traiettoria all'altra.

Rammentiamo che questa seconda proprietà è una conseguenza necessaria della prima, ammesso che i due sistemi debbano essere normali a due superficie.

Reciprocamente se due sistemi sono connessi da queste due relazioni e se le rette dell'uno sono normali ad una superficie, anche quelle dell'altro sono dotate della stessa proprietà.

Se la superficie iniziale si considera come limite di un mezzo *eterogeneo*, è chiaro che l'indice di rifrangibilità, variabile da un punto all'altro di questa superficie, sarà costante lungo certe linee tracciate in essa: possiamo quindi formulare il seguente teorema, che è una nuova generalizzazione di quello di MALUS–DUPIN.

Se un fascio di raggi luminosi, normali ad una superficie, si rifrange alla superficie di un mezzo eterogeneo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i raggi rifratti sieno pure normali ad una superficie è che le linee lungo le quali è costante l'indice di rifrangibilità incontrino ortogonalmente i raggi incidenti.

È chiaro che qui assumiamo come direzione di un raggio rifratto quella della tangente alla curva che esso descrive nel mezzo rifrangente.

Nel caso attuale chiamando $n(u, v)$ l'indice di rifrangibilità nel punto (u, v), si avrà (art. III)

$$U' = -f(n)\frac{\partial t}{\partial u}, \qquad V' = -f(n)\frac{\partial t}{\partial v},$$

quindi

$$U'\,du + V'\,dv = -f(n)\,dt = -\,dt_1,$$

e la costruzione della superficie ortogonale ai raggi rifratti si otterrà dalla formula

$$t_1 = \int f(n)\,dt + \text{Cost.},$$

dove n dovrà esprimersi in funzione di t, o t di n.

VI.

Consideriamo le rette del sistema primitivo come invariabilmente connesse colla superficie iniziale (scelta ad arbitrio). Non farà difficoltà concepire questa connessione quando si supponga che la retta uscente da un punto dato debba formare angoli dati (variabili da punto a punto secondo leggi determinate) colle tangenti a due curve arbitrarie tracciate per quel punto sulla superficie, per es. alle due curve dei sistemi $u = \text{cost.},\ v = \text{cost.}$ che passano per il punto considerato. Nulla impedisce allora di supporre che la superficie, considerata come flessibile ed inestendibile, assuma una qualunque delle infinite forme conciliabili colla sua natura, trasportando con sè tutte le rette del sistema: a ciascuna di queste forme corrisponderà evidentemente una disposizione pienamente determinata di quelle rette.

Sieno $\alpha(u,v),\ \beta(u,v)$ gli angoli che la retta (X,Y,Z) fa colle curve $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ nel punto (u,v), in cui essa incontra la superficie iniziale. In virtù dei valori (7) si ha

$$U = \sqrt{E}\cdot\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{G}\cdot\cos\beta,$$

e quindi la condizione dell'esistenza di una superficie ortogonale diventa

$$\frac{\partial(\sqrt{E}\cdot\cos\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G}\cdot\cos\beta)}{\partial u}.$$

Ora le quantità $E,\ G$ rimangono inalterate nelle varie flessioni della superficie; gli angoli α e β rimangono anch'essi, per ipotesi, formati sempre nello stesso modo con u e v: dunque se l'equazione precedente è soddisfatta quando la superficie ha una certa forma, essa non cessa d'esserlo in tutte le possibili trasformazioni della superficie stessa.

Abbiamo dunque il seguente teorema:

Se le rette componenti un sistema sono normali ad una superficie, e se queste rette si considerano come invariabilmente connesse ad una superficie arbitraria (nei punti in cui esse la incontrano), in ogni flessione di questa superficie esse si manterranno sempre normali ad una superficie.

Rammentiamo ancora che l'equazione (3), nel caso delle rette normali ad una superficie, dà

$$t = \text{Cost.} - \varphi(u, v),$$

dove t è la lunghezza che si deve portare su ciascuna retta, partendo dalla superficie iniziale, per ottenere il punto d'intersezione con una delle superficie ortogonali. Questa lunghezza non dipende che dalla funzione φ, la quale è data dall'equazione

$$\sqrt{E} \cdot \cos\alpha \, du + \sqrt{G} \cdot \cos\beta \, dv = d\varphi,$$

e che rimane quindi inalterata, per le ipotesi fatte, in ogni flessione della superficie iniziale. Dunque: *comunque si trasformi questa superficie (supposta flessibile ed inestendibile), il luogo geometrico degli estremi delle lunghezze t, ritenuto che le rette restino sempre connesse alla superficie, non cessa mai d'essere una superficie ortogonale alle rette stesse.*

Queste proprietà, combinate con altre che esporremo in seguito, ci serviranno a mettere in piena luce i bei risultati ottenuti recentemente dal sig. WEINGARTEN[*)], rispetto a certe classi di superficie applicabili le une sulle altre.

VII.

Fra le varie ipotesi che si possono istituire sulla disposizione delle rette rispetto alla superficie iniziale, merita speciale attenzione quella in cui tutte le rette che incontrano una delle linee $\varphi = \text{cost.}$ fanno un angolo costante colla superficie, per modo che si abbia

$$\operatorname{sen}\theta = f(\varphi).$$

In questo caso, supponendo che tutte le rette del sistema sieno normali ad una medesima superficie, si ha

$$\frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = [f(\varphi)]^2,$$

epperò, in virtù di quel che abbiamo dimostrato nell'art. IV, le traiettorie ortogonali delle linee $\varphi = \text{cost.}$ sono linee geodetiche della superficie iniziale, ossia le linee $\varphi = \text{cost.}$ sono parallele, nel senso che si è dichiarato precedentemente. Reciprocamente se, essendo costante l'angolo θ lungo ciascuna delle curve ortogonali a $\varphi = \text{cost.}$, queste curve sono parallele, le rette del sistema sono tutte normali ad una medesima superficie. In-

[*)] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIX (1861), pag. 382.

fatti, supponendo che si abbia

$$U = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad V = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

risulta

$$\operatorname{sen} \theta = \mu \varpi_\Phi,$$

in cui ϖ_Φ esprime, in questo caso, una vera funzione di Φ, poichè le curve $\Phi = \text{cost.}$ sono, per ipotesi, parallele fra loro. Ma d'altra parte, per la costanza dell'angolo θ, si ha anche

$$\operatorname{sen} \theta = f(\Phi),$$

dunque

$$\mu = \frac{f(\Phi)}{\varpi_\Phi},$$

donde si scorge che il fattore d'integrazione è funzione del solo integrale Φ, o ciò che torna lo stesso, che l'espressione

$$U\,du + V\,dv$$

ossia

$$\mu\,d\Phi$$

è un differenziale esatto a due variabili.

Come caso particolare del precedente teorema, possiamo enunciare quest'altro: *se un sistema di rette, normali ad una medesima superficie, incontra sotto un angolo costante un'altra superficie, le infinite linee che si possono tracciare su questa, normalmente a quelle rette, sono le sviluppanti geodetiche di una medesima curva, ossia hanno per traiettorie ortogonali un sistema di linee geodetiche.*

Da questo teorema, nel caso che l'angolo sia nullo, deriva spontaneamente quest'altro, conosciuto[*)]:

Se un sistema di rette, tangenti ad una medesima superficie, è normale ad una medesima altra superficie, esso si compone delle tangenti ad una serie di linee geodetiche tracciate sulla prima superficie;

e reciprocamente:

Se si traccia sopra una superficie qualunque una serie di linee geodetiche, le rette tangenti a queste linee costituiscono il sistema delle normali ad una medesima superficie.

Si dimostra facilmente che in questo caso la prima superficie è il luogo dei centri di curvatura della seconda.

Le ultime proprietà si possono dimostrare direttamente mediante l'equazione

$$\frac{\partial(\sqrt{E}\cos\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G}\cos\beta)}{\partial u}.$$

[*)] Veggasi Bertrand, *Traité de calcul différentiel*, § 661, 662.

stabilita nell'art. VI. Supponendo infatti che le linee $v =$ cost. sieno quelle a cui le rette sono tangenti, e supponendo inoltre $F = 0$, si avrebbe

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0,$$

e la precedente equazione si ridurrebbe alla

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

la quale esprime appunto che le linee $v =$ cost. sono geodetiche.

Si osserverà anche che nel caso attuale le linee $\varphi =$ cost. sono le traiettorie ortogonali delle geodetiche. Per tutti i punti di una di queste traiettorie la distanza t da una delle superficie ortogonali a tutte le rette è costante, perchè data dalla formula $t =$ cost. $- \varphi$. D'altronde questa distanza è uno dei raggi di principale curvatura della superficie; abbiamo dunque la seguente proprietà[*)]: *il raggio di principale curvatura d'una superficie è costante lungo le linee che corrispondono alle traiettorie ortogonali delle geodetiche inviluppate dalle normali, sulla superficie dei centri di curvatura relativi al raggio stesso.*

VIII.

Restituendoci nel caso generale considerato nell'art. I, supponiamo che le linee sieno rappresentate, come d'ordinario, da due sole equazioni fra le $x,\ y,\ z$ con due parametri arbitrarii u e v, le quali supporremo ridotte alla forma:

$$u(x,y,z) = u, \qquad v(x,y,z) = v. \tag{19}$$

Poniamo per brevità

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} = P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} = Q,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = R,$$

[*)] Notata dal sig. WEINGARTEN nel *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LIX (l. c.). Il teorema dato dal medesimo geometra nel t. LXII dello stesso Giornale, pag. 62, è una immediata conseguenza dell'attuale.

e rappresentiamo con $dz = p\,dx + q\,dy$ l'equazione della superficie (ipotetica) che sega ortogonalmente tutte le curve (19). Si dovrà avere

$$\frac{-p}{P} = \frac{-q}{Q} = \frac{1}{R},$$

e poichè l'equazione differenziale $dz = p\,dx + q\,dy$ deve potersi integrare mediante una sola equazione fra le $x,\ y,\ z$, anche l'equazione

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

dovrà essere dotata della medesima proprietà. Perciò la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una superficie ortogonale alle linee (19) è

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{20}$$

Si possono fare su questa equazione osservazioni analoghe a quelle cui diede luogo l'equazione (4).

Essa può essere trasformata con vantaggio, nel modo seguente.

Indichiamo per brevità cogli indici 1, 2, 3 le derivazioni parziali relative alle variabili $x,\ y,\ z$ e poniamo

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{22} + u_{33} &= U, \\ v_{11} + v_{22} + v_{33} &= V, \\ u_1 v_{1,r} + u_2 v_{2,r} + u_3 v_{3,r} &= H_r, \\ v_1 u_{1,r} + v_2 u_{2,r} + v_3 u_{3,r} &= K_r, \qquad (r = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Si trova facilmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= U v_1 - V u_1 + H_1 - K_1, \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= U v_2 - V u_2 + H_2 - K_2, \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= U v_3 - V u_3 + H_3 - K_3, \end{aligned}$$

per cui osservando le relazioni identiche

$$P u_1 + Q u_2 + R u_3 = 0,$$

$$P v_1 + Q v_2 + R v_3 = 0,$$

si vede che la condizione (20) può scriversi

$$PH_1 + QH_2 + RH_3 = PK_1 + QK_2 + RK_3.$$

Indichiamo ora con $\delta x,\ \delta y,\ \delta z$ i differenziali di $x,\ y,\ z$ relativi ad uno spostamento infinitesimo lungo la tangente alla linea che passa per il punto (x, y, z): si ha evidentemente

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R},$$

quindi l'equazione precedente può scriversi anche così:

$$H_1\,\delta x + H_2\,\delta y + H_3\,\delta z = K_1\,\delta x + K_2\,\delta y + K_3\,\delta z.$$

Se si ripongono in questa equazione i valori di H_r e K_r, si scorge immediatamente che il risultato può essere messo sotto la forma:

$$u_1\,\delta v_1 + u_2\,\delta v_2 + u_3\,\delta v_3 = v_1\,\delta u_1 + v_2\,\delta u_2 + v_3\,\delta u_3, \tag{21}$$

conservando alla caratteristica δ il senso or ora dichiarato.

Questa nuova forma della condizione (20) ci sarà utile in seguito.

Se le due equazioni che definiscono il sistema non fossero sciolte rispetto ai parametri u e v, bisognerebbe sostituire nella (20) in luogo di $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, ecc. le espressioni

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{ecc.},$$

dove per $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$, ecc. sarebbero da surrogarsi i valori cavati dalle due equazioni proposte. Questa operazione non presenta alcuna difficoltà, tranne la lunghezza del calcolo; ma converrà quasi sempre eseguirla in ciaschedun caso particolare.

IX.

Consideriamo le (19) come le equazioni di due superficie, per le quali u e v abbiano due valori costanti, e poniamo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = L,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = M,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = N.$$

Chiamando $\lambda,\ \mu,\ \nu$ gli angoli che la normale alla prima superficie fa coi tre assi; $\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1$ le quantità analoghe per la seconda, si ha

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \cos\mu = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\cos\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \cos\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \cos\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial v}{\partial z},$$

da cui deducesi facilmente, per l'angolo ω delle due superficie, l'espressione

$$\cos\omega = \frac{M}{\sqrt{LN}}.$$

L'equazione delle linee di curvatura della prima superficie si può mettere, come è noto, sotto la forma:

$$(\cos\nu\,dy - \cos\mu\,dz)\,d\cos\lambda + (\cos\lambda\,dz - \cos\nu\,dx)\,d\cos\mu + (\cos\mu\,dx - \cos\lambda\,dy)\,d\cos\nu = 0.$$

Da quest'equazione e dalla

$$\cos\lambda\cdot d\cos\lambda + \cos\mu\cdot d\cos\mu + \cos\nu\cdot d\cos\nu = 0$$

si deduce

$$\frac{d\cos\lambda}{dx} = \frac{d\cos\mu}{dy} = \frac{d\cos\nu}{dz}\text{*)},$$

ossia, ponendo per $\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu$ i valori precedenti e indicando con I un fattore indeterminato,

$$L\,du_1 - \frac{1}{2}u_1\,dL = I\,dx,$$

$$L\,du_2 - \frac{1}{2}u_2\,dL = I\,dy,$$

$$L\,du_3 - \frac{1}{2}u_3\,dL = I\,dz.$$

A queste equazioni, che sono in sostanza solamente due, si possono surrogare quelle che si ricavano da esse moltiplicandole ordinatamente prima per $u_1,\ u_2,\ u_3$, poi per $v_1,\ v_2,\ v_3$ e sommando ciascuna volta. Il primo risultato è una identità; il secondo è

$$L\,(v_1\,du_1 + v_2\,du_2 + v_3\,du_3) = \frac{1}{2}M\,dL + I\,dv.$$

*) Le equazioni delle linee di curvatura furono date per la prima volta sotto questa forma utilissima dal sig. O. RODRIGUES nella *Correspondance sur l'École polytechnique*, t. III (1816), pag. 163.

dove i differenziali si riferiscono sempre a variazioni lungo una linea di curvatura della prima superficie.

Se questa linea di curvatura fosse l'intersezione delle due superficie, si avrebbe lungo essa $dv = 0$; quindi l'equazione

$$L(v_1\,\delta u_1 + v_2\,\delta u_2 + v_3\,\delta u_3) = \frac{1}{2}M\,\delta L \tag{22}$$

esprime la condizione perchè l'intersezione delle due superficie sia linea di curvatura della prima di esse; purchè i differenziali δ s'intendano riferiti ad una variazione lungo la curva d'intersezione.

Analogamente l'equazione

$$N(u_1\,\delta v_1 + u_2\,\delta v_2 + u_3\,\delta v_3) = \frac{1}{2}M\,\delta N \tag{23}$$

esprime la condizione perchè la stessa linea d'intersezione sia linea di curvatura della seconda superficie, ritenendo sempre per δ il significato anzidetto.

Quando le due equazioni (22), (23) sono simultaneamente soddisfatte, la linea di intersezione delle due superficie è linea di curvatura tanto dell'una quanto dell'altra. In questo caso si può dedurre facilmente da quelle equazioni un elegante teorema di TERQUEM[*]. Sommando le dopo averle rispettivamente divise per LM, MN si trova

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta L}{L} + \frac{\delta N}{N}\right),$$

ossia

$$\delta\left(\log\frac{M}{\sqrt{LN}}\right) = 0.$$

In virtù del significato di δ, questa equazione esprime che la quantità $\dfrac{M}{\sqrt{LN}}$, ossia l'angolo ω delle due superficie, è costante in tutti i punti della loro comune intersezione. Questo teorema, di cui il sig. BRIOSCHI ha dato una bella dimostrazione analitica[**], si può stabilire anche geometricamente,
come può vedersi nelle mie ricerche:
Sulla teoria delle sviluppoidi[***].

Si può osservare che le equazioni (22), (23) possono scriversi nel modo seguente:

[*] Enunciato a pag. 402 del t. XI (1852) dei *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

[**] *Annali di scienze matematiche e fisiche* (di TORTOLINI), t. IV (1853), pag. 129.

[***] *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. IV (1867), nota a pag. 274; oppure queste *Opere*, vol. I, pag. 26.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \delta u_1 & \delta u_2 & \delta u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \delta v_1 & \delta v_2 & \delta v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si possono anche eliminare interiamente dalle suddette equazioni i differenziali δ, e ridurle fra sole quantità finite. Osserviamo per ciò che, ricordando il significato delle lettere $P,\ Q,\ R$ (art. prec.), si ha

$$\delta x = \varkappa P, \qquad \delta y = \varkappa Q, \qquad \delta z = \varkappa R,$$

dove $\varkappa$ rappresenta un opportuno fattore: qualunque sia la funzione Ψ si ha dunque

$$\delta\Psi = \varkappa\big(\Psi_1 P + \Psi_2 Q + \Psi_3 R\big).$$

In base a ciò le equazioni (22), (23) si trasformano facilmente nelle seguenti:

$$L\,(PK_1 + QK_2 + RK_3) = \frac{1}{2} M\,(PL_1 + QL_2 + RL_3),$$

$$N\,(PH_1 + QH_2 + RH_3) = \frac{1}{2} M\,(PN_1 + QN_2 + RN_3),$$

nelle quali non entra più alcun differenziale.

Supponiamo che i due sistemi di superficie rappresentati dalle (19), quando le u, v sono parametri arbitrarii, sieno ortogonali. Si avrà identicamente

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0,$$

e quindi anche

$$u_1\,\delta v_1 + u_2\,\delta v_2 + u_3\,\delta v_3 = -\big(v_1\,\delta u_1 + v_2\,\delta u_2 + v_3\,\delta u_3\big), \tag{24}$$

qualunque sia la variabile cui si riferisce la caratteristica δ. Ora, se questi due sistemi di superficie sono segati ortogonalmente da un terzo sistema, questo deve evidentemente segare ad angolo retto anche tutte le curve d'intersezione fra le superficie dei due primi, e quindi dev'essere soddisfatta l'equazione (21). In virtù dunque di questa e della (24) si avranno le due identità

$$u_1\,\delta v_1 + u_2\,\delta v_2 + u_3\,\delta v_3 = 0, \qquad v_1\,\delta u_1 + v_2\,\delta u_2 + v_3\,\delta u_3 = 0.$$

Ma avendosi, per ipotesi, $M = 0$, le due condizioni (22), (23) si riducono semplicemente alle due precedenti, epperò risultano soddisfatte identicamente per il semplice fatto dell'ortogonalità dei tre sistemi. Con ciò è dimostrato che ogni intersezione di due su-

perficie dei due primi sistemi è una linea di curvatura dell'una e dell'altra superficie; ed è evidente che la stessa dimostrazione si applica anche alle restanti intersezioni.

Otteniamo in questo modo una nuova dimostrazione del celebre teorema di DUPIN sui sistemi tripli di superficie ortogonali.

Al teorema di TERQUEM, precedentemente dimostrato, ne corrisponde un altro che può riguardarsi come il suo reciproco, e che non è stato, io credo, osservato finora. Esso può enunciarsi così: *se i piani tangenti comuni a due superficie, toccano tanto l'una quanto l'altra nei punti di due loro linee di curvatura, la distanza dei punti corrispondenti di queste linee è costante.* (Chiamo punti corrispondenti quelli che si trovano nello stesso piano tangente comune).

Infatti, la retta che congiunge due punti corrispondenti è, per la nota teoria delle tangenti coniugate, normale alle due linee di curvatura; d'altronde essa è una generatrice della superficie sviluppabile inviluppata dai piani tangenti comuni alle due superficie: dunque le due linee di curvatura sono traiettorie ortogonali delle generatrici di questa superficie, epperò la porzione di generatrice intercetta fra esse è costante.

Questa dimostrazione rende manifesta la verità del teorema reciproco: *se i piani tangenti comuni a due superficie toccano l'una di queste secondo una linea di curvatura, e se inoltre è costante la distanza dei punti corrispondenti delle due linee di contatto, anche la seconda di queste linee è linea di curvatura della superficie su cui è tracciata.*

Come casi particolari noteremo i seguenti due teoremi:

Se i piani tangenti ad una superficie lungo una sua linea di curvatura sono tangenti in pari tempo ad una sfera, la linea di curvatura è sferica. [Se si suppone che la sfera si riduca ad un punto, si ottiene un teorema di cui fece già uso JOACHIMSTHAL nello studio di certe superficie[*)]. Il qual ultimo teorema presenta una tal qual reciprocità con un altro notissimo dello stesso JOACHIMSTHAL[**)], come il teorema più generale la presenta con uno del sig. J. A. SERRET[***)].]

Reciprocamente: *se i piani tangenti comuni ad una sfera e ad una superficie data toccano questa superficie in punti equidistanti dai corrispondenti punti di contatto colla sfera, il luogo dei detti punti è una linea di curvatura della superficie ed è altresì una linea sferica.*

[*)] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LIV (1857), pp. 182–184. Le proprietà di queste superficie erano già state dimostrate analiticamente da JOACHIMSTHAL nel *Mémoire sur les surfaces courbes* (Berlino, 1848).

[**)] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. XXX (1846), pag. 348: il teorema in discorso è attribuito a LANCRET dal sig. O. BONNET.

[***)] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVIII (1853), pag. 1.

Questo teorema può esser utile nella ricerca delle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche.

Il seguente teorema deducesi facilmente dal citato teorema del sig. J. A. SERRET.

Se una linea di curvatura è sferica, i piani tangenti alla superficie, nei punti di questa linea, sono tangenti ad una medesima sfera.

X.

La teoria dei sistemi di rette distribuite nello spazio, della quale ci siamo occupati in alcuni dei precedenti articoli, può considerarsi sotto due aspetti assai differenti, fra i quali, per quanto ci sembra, non fu sempre fatta una distinzione così esplicita come si conveniva.

Si può infatti supporre che i coseni $X,\ Y,\ Z$ sieno funzioni delle tre coordinate del punto di partenza, considerate come variabili indipendenti: e in questo caso si ottiene un sistema che potrebbe chiamarsi *complesso*, giacchè per ciascun punto dello spazio passa un numero infinito di rette, generatrici di una superficie conica. Sieno infatti

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z}, \tag{25}$$

le equazioni di una di queste rette, in cui $\xi,\ \eta,\ \zeta$ rappresentano le coordinate correnti, $x,\ y,\ z$ quelle del suo punto di partenza. Se consideriamo $\xi,\ \eta,\ \zeta$ come costanti, le due equazioni precedenti sono soddisfatte dalle coordinate $x,\ y,\ z$ dei punti di partenza di tutte le rette che passano per il punto dato $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$: dunque il luogo geometrico di questi punti è una *linea continua* che passa per il punto stesso.

Questo caso fu già considerato da MALUS[*)], il quale osservò che fra i punti circonvicini a quello donde esce una data retta del sistema, ve ne sono alcuni dai quali escono altre rette che incontrano la data in qualche punto (o meglio le cui minime distanze da quella sono d'ordine superiore al primo), e che il luogo geometrico di questi punti è una superficie conica di 2° ordine, di cui la retta data è una generatrice. Ciò dimostrasi facilmente rappresentando con t il valor comune dei tre rapporti (25) e differenziando le tre equazioni risultanti nell'ipotesi $d\xi = d\eta = d\zeta = 0$; si ha

[*)] *Mémoire sur l'optique*, nel t. VII del *Journal de l'École Polytechnique*, pag. 1. Questo teorema può dedursi da quello di MONGE, come ha osservato il sig. CHASLES, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LII (1861), pag. 1017.

infatti così:

$$dx + X\,dt + t\,dX = 0,$$
$$dy + Y\,dt + t\,dY = 0,$$
$$dz + Z\,dt + t\,dZ = 0,$$

da cui eliminando t e dt si ottiene

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0,$$

equazione omogenea e del 2° grado rispetto a $dx,\ dy,\ dz$, che è soddisfatta da $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$, donde il teorema.

Lo stesso argomento fu trattato recentemente dal signor A. TRANSON[*)], il quale dimostrò che si può sempre, ed in infinite maniere, decomporre il sistema generale in sistemi parziali di rette normali ad una superficie; e l'equazione che governa siffatta decomposizione esprime una condizione cui debbono soddisfare le superficie luoghi dei punti di partenza delle rette appartenenti a ciascun sistema parziale, mentre i coseni $X,\ Y,\ Z$ restano formati in un modo completamente arbitrario con $x,\ y,\ z$.

Si può invece restringere la ricerca, come abbiamo fatto nei precedenti articoli, ai sistemi *semplici* di rette, cioè a quei sistemi nei quali per ciascun punto dello spazio non passa, in generale, che una sola retta od un numero limitato di rette. Ciò equivale a riguardare $x,\ y,\ z,\ X,\ Y,\ Z$ come funzioni di due variabili indipendenti, cioè a supporre che le varie rette partano, non già da ciascun punto dello spazio, ma solamente dai punti di una certa superficie, la cui natura dipende da quella delle funzioni $x,\ y,\ z$, e che può essere scelta ad arbitrio, purchè si determinino convenientemente queste funzioni. In questo caso l'esistenza di una superficie ortogonale impone una condizione alle funzioni $x,\ y,\ z$ e non alla superficie iniziale, poichè sebbene la natura di questa influisca sulla forma di quelle funzioni, pure essa non modifica punto la distribuzione del sistema, col quale non ha che una relazione accidentale.

Questo secondo genere di questioni recentemente trattato dal signor KUMMER[**)], fu studiato primieramente da MONGE[***)], le cui ammirabili scoperte sono state poscia

[*)] *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXII, cahier 38 (1861), pag. 195.

[**)] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LVII (1860), pag. 189.

[***)] Mémoires de l'Académie des Sciences, pour 1781 : *Mémoire sur les déblais et les remblais*, art. XIX-XXXIII.

completate e messe nella maggior luce dalle belle ricerche del signor BERTRAND [*]e da alcune ingegnose osservazioni dell'illustre STURM [**].

Si potrebbe, per verità, anche in questo secondo caso, riguardare $X,\ Y,\ Z$ come funzioni di $x,\ y,\ z$, salvo il tener conto dell'equazione della superficie iniziale; ma questo metodo è poco vantaggioso nella ricerca della condizione d'esistenza di una superficie ortogonale[***].

Fra le due classi di problemi che abbiamo or ora accennato esiste un caso di transizione; ed è quello in cui i coseni $X,\ Y,\ Z$ sono tali funzioni di $x,\ y,\ z$ che il sistema determinato da esse, apparentemente complesso, si riduce in realtà ad un sistema semplice. Nei seguenti articoli vogliamo esaminare questo caso singolare.

XI.

Affinchè questo caso si verifichi, bisogna evidentemente che il luogo dei punti di partenza di tutte le rette che passano per il punto qualunque $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, luogo rappresentato dalle equazioni (25), e passante per il punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, si riduca ad una retta. Ora indicando con t la distanza da questo punto al punto $(x,\ y,\ z)$, da cui parte una

[*]Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), pag. 133.

[**]Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XX (1845), pag. 1239 e seguenti, nella parte analitica del *Mémoire sur la vision*.

[***]Nell'effettuare questa ricerca il signor DIEU [*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XI (1852), pag. 70] è caduto in un equivoco che fu avvertito dal signor A. TRANSON [*Nouvelles Annales de Mathématiques* (2^{me} série), t. II (1863), pag. 138]. A noi sembra però che una parte del disaccordo fra i due autori si spieghi colla differente interpretazione ch'essi danno all'enunciato del problema, enunciato il quale non è infatti scevro da ambiguità.

Nel secondo dei citati articoli (pag. 140) il signor TRANSON fa uso di una certa proprietà del fattore d'integrazione d'un differenziale a tre variabili. Questa proprietà non è che un caso particolare d'un'altra assai generale e pressochè intuitiva, la quale consiste in ciò che «un'equazione alle derivate parziali lineare ed omogenea, cioè della forma:

$$P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+P_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,\qquad \left[P_r=\text{funz.}(x_1,x_2,\ldots,x_n,\varphi)\right]$$

non può avere più di $n-1$ soluzioni indipendenti.» Ciò deducesi immediatamente dallo stesso metodo d'integrazione di LAGRANGE, ma risulta anche da ciò che il Jacobiano di n soluzioni distinte è nullo in virtù dell'equazione proposta, per cui queste n soluzioni non possono essere indipendenti. Nel caso considerato dal signor TRANSON le funzioni μ ed F soddisfanno ad un'equazione della forma indicata, alla quale soddisfà pure l'integrale U per la proporzionalità di $X,\ Y,\ Z$ a $\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}$; dunque una di queste tre funzioni deve esser funzione delle altre due.

delle rette in discorso, si ha

$$\xi = x + tX, \qquad \eta = y + tY, \qquad \zeta = z + tZ, \tag{26}$$

e se queste equazioni si suppongono risolute rispetto ad $x,\ y,\ z$ (di cui sono funzioni date le $X,\ Y,\ Z$), si avranno le coordinate dei punti da cui escono le infinite rette passanti per il punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, espresse per la variabile indipendente t. La direzione della tangente alla linea luogo geometrico di questi punti si otterrà dunque per mezzo delle formule

$$0 = \frac{dx}{dt} + X + t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right),$$

$$0 = \frac{dy}{dt} + Y + t\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right),$$

$$0 = \frac{dz}{dt} + Z + t\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right);$$

ma se la linea si riduce ad una retta, essendo t la lunghezza di questa retta, e la direzione di essa dovendo coincidere con quella della retta del sistema passante pel punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, si avrà, vista la direzione in cui si sono contate le t,

$$\frac{dx}{dt} = -X, \qquad \frac{dy}{dt} = -Y, \qquad \frac{dz}{dt} = -Z;$$

epperò dalle equazioni precedenti si dedurranno le condizioni

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

le quali esprimono che i coseni $X,\ Y,\ Z$ relativi alle rette passanti pel punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, non dipendono punto da t; ciò che è evidente, ed avrebbe potuto servire come punto di partenza, giacchè se la linea direttrice della superficie conica (che passa già pel suo vertice) riducesi ad una retta, tutte le generatrici devono sovrapporsi l'una all'altra.

Eliminando le $\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$, si perviene così alle condizioni cercate

$$\text{(27)}\qquad \begin{cases} X\dfrac{\partial X}{\partial x}+Y\dfrac{\partial X}{\partial y}+Z\dfrac{\partial X}{\partial z}=0,\\ X\dfrac{\partial Y}{\partial x}+Y\dfrac{\partial Y}{\partial y}+Z\dfrac{\partial Y}{\partial z}=0,\\ X\dfrac{\partial Z}{\partial x}+Y\dfrac{\partial Z}{\partial y}+Z\dfrac{\partial Z}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Osserviamo che se, in luogo del punto $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, si considerasse il punto $(\xi+t_0X,\ \eta+t_0Y,\ \zeta+t_0Z)$, appartenente alla retta che passa per il primo punto, le equazioni analoghe alle (26), per il secondo punto, non differirebbero dalle prime che per il cambiamento di t in $t-t_0$. Ora poichè, supponendo soddisfatte le condizioni (27), i coseni $X,\ Y,\ Z$ espressi per $\xi,\ \eta,\ \zeta$ sono indipendenti da t, è chiaro che i valori dei coseni stessi non varieranno, quando
si sostituisca $\xi+t_0X,\ \eta+t_0Y,\ \zeta+t_0Z$ al
posto di $\xi,\ \eta,\ \zeta$. Con ciò rendesi pienamente ragione del come accada che il sistema di rette, benchè dipendente da tre parametri, riducesi non pertanto ad un sistema semplice.

Notiamo che le equazioni (27) equivalgono a due sole realmente distinte, perchè se si moltiplicano rispettivamente per $X,\ Y,\ Z$ e si sommano, si ottiene un risultato identicamente nullo, in virtù delle derivate dell'equazione $X^2+Y^2+Z^2=1$.

Sottraendo queste derivate dalle precedenti equazioni, si ottengono le equivalenti

$$Y\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=Z\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

$$Z\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=X\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=Y\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

alle quali si possono sostituire le due seguenti:

$$\text{(28)}\qquad \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}}{X}=\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial z}}{Y}=\frac{\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{Z},$$

a meno che non si abbiano simultaneamente le tre relazioni

$$\text{(29)}\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0.$$

Consideriamo dapprima questo secondo caso.

Quand'esso si verifica, l'equazione (10) dell'art. II è soddisfatta indipendentemente dalla funzione F: dunque le rette del sistema corrispondente sono normali ad una medesima superficie. Inoltre le equazioni (29) esprimono evidentemente che $X,\ Y,\ Z$ sono le derivate parziali di una stessa funzione φ di $x,\ y,\ z$. Questa funzione è tale che soddisfa all'equazione

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=1, \tag{30}$$

e che, eguagliata ad una costante arbitraria, definisce la serie delle superficie ortogonali alle rette del sistema. Siccome queste superficie sono parallele fra loro, così i valori delle derivate $\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ non cambiano quando il punto $(x,\ y,\ z)$ si muove lungo una normale, cioè quando le coordinate $x,\ y,\ z$ si mutano in $x+tX,\ y+tY,$ $z+tZ$: il che conferma quanto abbiamo osservato al principio. Del resto questo parallelismo, che noi deduciamo *a priori* dalla natura della quistione, si può stabilire in modo diretto come segue. Rappresentiamo con $x_0,\ y_0,\ z_0$ le coordinate del punto d'incontro della normale alla superficie $\varphi=$ cost., il punto $(x,\ y,\ z)$ colla superficie $\varphi=0$, e con n la distanza di questi due punti; avremo, per la (30),

$$x-x_0=n\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad y-y_0=n\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad z-z_0=n\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

da cui

$$(x-x_0)\,\delta x+(y-y_0)\,\delta y+(z-z_0)\,\delta z=n\,\delta\varphi,$$

riferendo la caratteristica δ ad uno spostamento nel senso della normale n. Ma d'altra parte si ha anche

$$(x-x_0)\,\delta x+(y-y_0)\,\delta y+(z-z_0)\,\delta z=n\,\delta n,$$

dunque $\delta\varphi=\delta n$, ed, integrando lungo la normale, $\varphi=n$, poichè n deve annullarsi per $\varphi=0$. Questo risultato si può enunciare dicendo che: *se φ è una soluzione qualunque dell'equazione* (30)*, il valore che questa funzione riceve per un certo sistema di valori $(x',\ y',\ z')$ delle variabili $x,\ y,\ z$, misura la distanza della superficie*

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\varphi(x',\ y',\ z')$$

dalla superficie

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0;$$

donde consegue che tutte le superficie contenute nell'equazione $\varphi=$ cost. sono parallele fra loro[*)]. Ora qualunque sia la superficie iniziale da cui escono le rette $(X,\ Y,\ Z)$, se

[*)] L'equazione (30), che definisce il parallelismo delle superficie, fu data da BORDONI, nella Memoria citata all'art. IV.

si prende su ciascuna di esse, partendo da questa superficie, la lunghezza t data dall'equazione

$$t + \varphi = \text{cost.},$$

si ottiene, in virtù dell'equazione (3) dell'art. I, una superficie ortogonale a tutte le rette. Questo fatto è, nel caso attuale, reso evidente da quanto precede, poichè φ esprime, in ciascun punto della superficie iniziale, la distanza da questo punto alla superficie $\varphi = 0$, misurata normalmente a quest'ultima; dunque il luogo degli estremi dei segmenti uguali ad $a - \varphi$ è la superficie $\varphi = a$, qualunque sia la superficie iniziale.

Questi risultati si accordano pienamente con quelli che il Sig. BAEHR ha dedotti da altre considerazioni[*].

XII.

Passiamo ora al caso più generale, ed osserviamo anzitutto che, per essere $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, il valore comune dei tre rapporti (28) è eguale a quello dell'espressione

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

la quale non potrebbe quindi annullarsi senza che si ricadesse nel caso già trattato. Dunque l'equazione $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$ non ammette, pei nostri sistemi, un integrale unico che quando il suo primo membro è un differenziale esatto a tre variabili.

Procediamo all'integrazione delle equazioni (28), o delle (27) che ne possono tener luogo.

Per ciò supponiamo per un momento che si conosca il sistema dei valori generali delle funzioni incognite X, Y, Z, e consideriamo l'equazione a derivate parziali

$$X\frac{\partial \Theta}{\partial x} + Y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + Z\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \tag{31}$$

È noto che per trovare la soluzione generale di quest'equazione, bisogna integrare le equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \tag{32}$$

Sieno

$$u(x, y, z) = u, \qquad v(x, y, z) = v$$

[*] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, (2$^{\text{me}}$ série), t. II (1863), pag. 35.

i due integrali completi di queste equazioni, risoluti rispetto alle costanti arbitrarie u e v. Si avrà

$$\Theta = \Theta(u, v),$$

indicando con $\Theta(u, v)$, una funzione arbitraria di u e v. Ora le $X,\ Y,\ Z$ debbono soddisfare a tre equazioni in tutto simili alla (31), per cui esse dovranno avere la forma:

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v),$$

colla condizione $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Ne risulta che queste tre funzioni sono rese costanti dagli integrali delle (32), e che quindi nell'integrazione di queste equazioni si possono riguardare come tali: perciò rappresentando col differenziale di una nuova variabile t il valor comune dei tre rapporti (32), si otterrà

$$x = x_1 + tX, \qquad y = y_1 + tY, \qquad \zeta = \zeta_1 + tZ,$$

dove $x_1,\ y_1,\ \zeta_1$ sono funzioni arbitrarie delle $u,\ v$ riguardate come costanti nell'integrazione. Eliminando t fra queste equazioni, ricavando dalle risultanti

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{\zeta - \zeta_1}{Z} \tag{33}$$

i valori di $u,\ v$ (di cui sono funzioni $x_1,\ y_1,\ \zeta_1,\ X,\ Y,\ Z$) espressi per $x,\ y,\ \zeta$ e sostituendoli nelle $X,\ Y,\ Z$, si otterranno per queste funzioni i richiesti valori generali, soddisfacenti alle condizioni del problema. Osserviamo che nelle equazioni (33) si possono sostituire alle funzioni $X,\ Y,\ Z$, tre funzioni interiamente arbitrarie di u e v, $X_1,\ Y_1,\ Z_1$, purchè si prenda poscia

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \qquad Y = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \qquad Z = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}.$$

Il risultato a cui siamo giunti si può rendere manifesto anche geometricamente. Infatti se il sistema di rette che si considera, riducesi ad un sistema *semplice*, possiamo supporre che ciascuna delle rette che lo compongono parta da un punto della superficie iniziale arbitraria

$$x = x_1(u, v), \qquad y = y_1(u, v), \qquad \zeta = \zeta_1(u, v),$$

per cui i coseni corrispondenti si possono riguardare come funzioni delle sole $u,\ v$. Le equazioni della retta generica sono, in quest'ipotesi, le stesse (33). Se da queste equazioni caviamo i valori di $u,\ v$ in funzione di $x,\ y,\ \zeta$ e li riponiamo nei coseni

$X,\ Y,\ Z$, avremo questi coseni espressi per le coordinate di un punto qualunque della retta, e queste espressioni, pel modo stesso in cui furono ottenute, rimarranno evidentemente invariate qualunque sia il punto che si prenda sulla retta, vale a dire non cangieranno valore quando $x,\ y,\ z$ diventeranno $x + tX,\ y + tY,\ z + tZ$. Otterremo dunque un sistema nel quale, sebbene entrino i tre parametri indipendenti $x,\ y,\ z$, pure non passerà che una sola retta, od un numero limitato di rette, per ogni punto dello spazio.

Da queste considerazioni risulta manifestamente che le equazioni (27) o (28) non impongono alcuna speciale condizione geometrica ai sistemi *semplici* di rette che se ne ricavano: esse non determinano che la forma delle funzioni da cui sono definiti questi sistemi, quando vengono considerati come *complessi*.

Osserveremo per ultimo, che il numero delle funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione è solamente in apparenza maggiore di quello che la teoria richiede: non l'abbiamo ridotto al minimo, per conservare la simmetria delle formule; del che ognuno potrà facilmente convincersi. Il problema trattato è un caso particolare del seguente: « Trovare i valori generali delle funzioni $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_m$ che soddisfanno alle m equazioni a derivate parziali

$$P_1\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_2} + \cdots + P_n\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_n} = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ \dots\ m),$$

in cui i coefficienti $P_1,\ P_2, \dots,\ P_n$, eguali in tutte le equazioni, sono funzioni qualisivogliono delle variabili indipendenti $x_1,\ x_2, \dots x_n$ e delle funzioni cercate $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots \varphi_m$. » La risoluzione di questo problema, quale risulta dalla teoria generale e dalle considerazioni usate precedentemente, consiste nel trovare gli $n - 1$ integrali completi

$$f_r\big(x_1,\ x_2, \dots x_n,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \dots \varphi_m,\ u_1,\ u_2, \dots u_{n-1}\big) = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ \dots\ n-1)$$

del sistema d'equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n},$$

in cui le quantità $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots \varphi_m$, si devono considerare come costanti: nell'eguagliare queste quantità ad altrettante funzioni arbitrarie delle costanti d'integrazione u_1, $u_2, \dots u_{n-1}$, e nel sostituire in queste funzioni stesse i valori ricavati per queste costanti dalle $n - 1$ equazioni integrali, nelle quali esse entrano tanto esplicitamente, quanto implicite nelle $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots \varphi_m$. È chiaro che questa soluzione contiene il debito numero di funzioni arbitrarie.

XIII.

Le superficie si possono considerare sotto due aspetti assai differenti, cioè o come limiti di solidi, o come solidi flessibili ed inestensibili, una delle cui dimensioni si riguardi come evanescente[*].

Quando si adotta questo secondo punto di vista, le proprietà delle superficie vengono a dividersi in due classi: l'una comprende quelle proprietà che sono essenzialmente connesse colla forma speciale che si attribuisce attualmente alla superficie considerata, e che si modificano insieme con essa; all'altra classe appartengono invece quelle proprietà che sussistono indipendentemente da ogni particolare determinazione della forma stessa. Queste ultime possono chiamarsi *assolute*, le prime *relative*. Così, a cagion d'esempio, il celebre teorema di GAUSS, relativo alla *conservazione della curvatura*, esprime una proprietà assoluta la quale, e per la generalità di cui è dotata, e per la vastità delle ricerche a cui apre la via, merita certamente di essere riguardata come una delle più importanti conquiste dell'analisi moderna.

Allorchè si considerano le superficie sotto questo secondo aspetto, l'ordinaria rappresentazione cartesiana rendesi poco opportuna, siccome quella che è troppo intimamente connessa colla posizione e colla figura attuale della superficie. Quando questa viene considerata come flessibile ed inestensibile, ciò che rimane inalterato è la lunghezza di ciascun elemento lineare, e tutte le proprietà assolute non possono essere che conseguenze di questa inalterabilità. Quindi, nell'ordine delle ricerche di cui vogliamo ora occuparci, la superficie è perfettamente definita dall'espressione del suo elemento lineare, il cui quadrato ha la forma

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{34}$$

ed in cui le E, F, G hanno il significato con cui si sono già usate nell'art. III. Le due indeterminate u e v, che fanno l'ufficio di variabili indipendenti, sono denominate *coordinate curvilinee* perchè, come è notissimo, possono riguardarsi come i parametri di due famiglie di curve tracciate sulla superficie, dall'intersezione delle quali vengono individuati i punti della superficie stessa.

Tutte quelle superficie il cui elemento lineare è rappresentato dalla medesima espressione (34) sono riguardate, nel presente ordine di ricerche, come identiche fra loro. Ma non sussiste la proprietà reciproca: le tre funzioni E, F, G possono essere

[*] GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. XIII.
CASORATI, *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* [*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. III (1860), pag. 363, t. IV (1861), pag. 177.].

formate in infiniti modi diversi con due variabili indipendenti, senza che le superficie definite dalle corrispondenti espressioni (34) sieno perciò necessariamente distinte fra loro. È chiaro infatti che se nell'espressione (34) si surrogano alle $u,\ v$ due funzioni arbitrarie di due nuove variabili $u',\ v'$, l'espressione risultante, riducibile sempre alla forma

$$E'\,du'^2 + 2F'\,du'dv' + G'\,dv'^2, \tag{34'}$$

è atta, non meno della prima, a definire la superficie ordinaria (e per conseguenza anche tutte quelle che se ne possono dedurre mediante semplici flessioni), giacchè la trasformazione che si è effettuata sulle variabili equivale all'assunzione di un nuovo sistema di coordinate curvilinee.

Per poter dunque giudicare se due espressioni della forma (34), (34′) appartengano ad una medesima superficie o, ciò che torna lo stesso, a due superficie sovrapponibili l'una all'altra, bisogna cercare se sia possibile istituire fra le $u,\ v,\ u',\ v'$ due relazioni tali, che in virtù di esse l'una espressione si trasformi identicamente nell'altra. Ed è manifesto che le condizioni di questa possibilità devono equivalere, geometricamente, all'eguaglianza di certe proprietà assolute delle due superficie, in numero necessario e sufficiente a determinare l'identità. Di qui si scorge quanto sia importante la conoscenza di queste proprietà, per la risoluzione dei problemi che si presentano nella teoria delle superficie flessibili.

Ora l'espressione analitica di queste proprietà assolute deve evidentemente essere somministrata da formule, in cui entrino quelle sole quantità che compaiono nell'espressione dell'elemento lineare della superficie, cioè le $u,\ v,\ E,\ F,\ G$ e le derivate delle $E,\ F,\ G$ rispetto alle $u,\ v$; e se quell'espressione è la più generale possibile, cioè se le linee coordinate $u = \text{cost.},\ v = \text{cost.}$ sono del tutto indeterminate, quelle formule, dovendo essere indipendenti dalla scelta delle coordinate stesse, debbono conservare la medesima forma qualunque sia il significato geometrico attribuito alle variabili. Dunque ogni formula che esprime una proprietà assoluta dev'esser tale che, sostituendo alle variabili $u,\ v$ due funzioni arbitrarie di due nuove variabili $u',\ v'$, essa si trasformi in un'altra formula, nella quale entrino le $u',\ v',\ E',\ F',\ G'$ e le derivate delle $E',\ F',\ G'$ rispetto alle $u',\ v'$ nel medesimo modo in cui nella prima entravano le $u,\ v,\ E,\ F,\ G$ e le derivate delle $E,\ F,\ G$ rispetto alle $u,\ v$. Ora è facile provare, innanzi tutto, che tali formule o funzioni non possono contenere le $u,\ v$ esplicitamente. Infatti se

$$f\left(u,\ v,\ E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\ \frac{\partial E}{\partial v},\ \ldots\right)$$

fosse una di queste funzioni, ponendo $u = u' + a,\ v = v' + b$, ed osservando che $\frac{\partial E'}{\partial u'} = \frac{\partial E}{\partial u}$, ecc., si troverebbe quale funzione trasformata

$$f\left(u'+a,\ v'+b,\ E',\ F',\ G',\ \frac{\partial E'}{\partial u'},\ \frac{\partial E'}{\partial v'},\ \ldots\right),$$

la cui composizione non è identica a quella della primitiva, per la presenza delle costanti arbitrarie $a,\ b$, le quali non possono sparire in niun modo, a meno che non si suppongano mancanti le $u,\ v$. Da ciò concludiamo intanto che ogni formula rappresentatrice di una proprietà assoluta è formata solamente colle $E,\ F,\ G$ e colle loro derivate parziali[*)].

Ma il concetto di queste funzioni, che si possono chiamare *assolute* come le proprietà geometriche che rappresentano, è suscettibile di un'utile estensione. Consideriamo, oltre le $E,\ F,\ G$, altre funzioni $\varphi,\ \psi,\ldots$ di $u,\ v$, e supponiamo che quello stesso cambiamento di variabili, il quale trasforma l'espressione (34) nella (34′), trasformi parimente le $\varphi,\ \psi,\ldots$ nelle $\varphi',\ \psi',\ldots$. Un'espressione formata colle $E,\ F,\ G,\ \varphi,\ \psi,\ldots$ e colle loro derivate parziali rispetto alle $u,\ v$ si dirà *invariabile* quando, per l'anzidetto cambiamento di variabili, essa si trasformerà in un'espressione formata analogamente colle $E',\ F',\ G',\ \varphi',\ \psi',\ldots$ e colle loro derivate parziali rispetto alle $u',\ v'$.

È facile concepire di qual natura sieno le proprietà geometriche che corrispondono a queste nuove espressioni. Se si eguagliano le funzioni $\varphi,\ \psi,\ldots$ ad altrettante costanti od a parametri arbitrarii, si ottengono le equazioni di certe curve o di certi sistemi di curve tracciate sulla superficie: ora le proprietà rappresentate da quelle espressioni sono di tal natura, che non vengono punto modificate dai cambiamenti di forma, di cui la superficie data è suscettibile, sebbene poi dipendano dalle curve $\varphi,\ \psi,\ldots$; ossia sono relazioni geometriche che hanno luogo fra queste curve, indipendentemente dalla natura delle linee coordinate.

Se le funzioni $\varphi,\ \psi,\ldots$ fossero *assolute*, è chiaro che ogni funzione *invariabile* formata con esse fornirebbe una nuova funzione assoluta. È appunto in ciò che risiede, a nostro avviso, l'utilità delle funzioni invariabili, la cui ricerca sembra presentare minori difficoltà di quella delle funzioni assolute.

Il criterio che ci servirà per riconoscere le funzioni invariabili, quando esse non saranno l'immediata traduzione analitica di proprietà geometriche indipendenti dalla forma della superficie, è semplicissimo. Ogni volta che, considerando una superficie come riferita a due differenti sistemi di coordinate curvilinee $(u,\ v)$, $(u',\ v')$, perverremo ad una eguaglianza fra due espressioni, in una delle quali entrino solamente le quantità $E,\ F,\ G,\ \varphi,\ \psi,\ldots$ e le loro derivate rispetto alle $u,\ v$, nell'altra solamente le $E',\ F',\ G',\ \varphi',\ \psi',\ldots$ e le loro derivate rispetto alle $u',\ v'$, *senza che vi sia traccia*

[*)] L'idea di considerare e di cercare direttamente queste funzioni, partendo dalla loro proprietà caratteristica, è dovuta al sig. CASORATI. Si vegga la citata Memoria.

delle relazioni che passano fra i due sistemi di variabili, saremo certi che ciascuna di queste espressioni è invariabile. Se le coordinate $u,\ v$, del pari che le $u',\ v'$, sono assunte ad arbitrio, è chiaro che i due membri dell'eguaglianza anzidetta devono essere identici nella forma. Questa circostanza non si verificherà, quando quelle variabili corrisponderanno a speciali sistemi di coordinate, ma si potrà sempre inferire legittimamente dall'eguaglianza delle due espressioni, che esse sono funzioni invariabili equivalenti.

Se poi nell'eguaglianza mancassero le funzioni $\varphi,\ \psi, \ldots$ e non s'avessero che le sole $E,\ F,\ G$ colle loro derivate, si dovrà concludere che i due membri sono funzioni assolute, le quali, ciascuna nel rispettivo sistema di coordinate, esprimono una medesima proprietà geometrica, che sussiste in ogni punto della superficie, indipendentemente da qualunque flessione di questa.

XIV.

Noi possiamo già fin d'ora citare due funzioni invariabili di prim'ordine, che ci sono offerte da considerazioni geometriche semplicissime. L'una di esse contiene un solo *argomento* od una sola funzione arbitraria φ, ed è quella che abbiamo denominata *parametro differenziale di prim'ordine* della funzione stessa: il suo quadrato si ottiene formando coll'argomento φ l'espressione

$$\frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

che indicheremo col simbolo $(\Delta_1\varphi)^2$, già introdotto dal sig. LAMÉ. L'altra contiene due argomenti o due funzioni arbitrarie φ e ψ, e si ricava facilmente dalla considerazione dell'angolo di due curve, angolo il quale si mantiene evidentemente inalterato, in ogni flessione della superficie su cui le curve sono tracciate. Ponendo infatti

$$\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{EG - F^2} = \nabla\varphi\psi,$$

e denotando con ω l'angolo delle due curve $\varphi = \text{cost.},\ \psi = \text{cost.}$, si ha

$$\nabla\varphi\psi = -(\Delta_1\varphi)\cdot(\Delta_1\psi)\cos\omega,$$

donde si vede che l'invariabilità di ω, $\Delta_1\varphi$ e $\Delta_1\psi$ trae seco necessariamente quella di $\nabla\varphi\psi$. Reciprocamente l'invariabilità di $\nabla\varphi\psi$ trae seco quella di $\Delta_1\varphi$, il cui quadrato si ottiene ponendo $\varphi = \psi$. Inoltre dalla moltiplicazione delle forme quadratiche si deduce

$$(\Delta_1\varphi)^2(\Delta_1\psi)^2 - (\nabla\varphi\psi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 \frac{1}{EG-F^2},$$

donde risulta che la funzione

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{35}$$

è anch'essa invariabile. Questa funzione non è indipendente, potendo esprimersi colle Δ_1, ∇, ma in causa della sua semplicità è utile considerarla come una funzione distinta.

Applicando a queste tre funzioni le considerazioni esposte nell'articolo precedente possiamo stabilire i seguenti teoremi :

Se φ è una funzione assoluta della superficie il cui elemento lineare è rappresentato da

$$\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

l'espressione

$$(\Delta_1\varphi)^2 = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}$$

è una nuova funzione assoluta. Se φ, ψ sono due funzioni assolute della stessa superficie, le due espressioni

$$\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{EG-F^2} = \nabla\varphi\psi,$$

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

sono due nuove funzioni assolute[*)].

Dalle espressioni generali di $\Delta_1\varphi$, $\nabla\varphi\psi$, si cava

$$(\Delta_1 u)^2 = \frac{G}{EG-F^2}, \qquad \nabla uv = \frac{-F}{EG-F^2}, \qquad (\Delta_1 v)^2 = \frac{E}{EG-F^2},$$

laonde, scrivendo per semplicità h_1, h_2, h_{12} in luogo di $\Delta_1 u$, $\Delta_1 v$, ∇uv, si ha

[*)] Le proprietà di queste espressioni risultano anche dalla acuta analisi usata dal sig. CASORATI, come può vedersi nel § VI della sua Memoria.

$$(36)\qquad \begin{cases} (\Delta_1\varphi)^2 = h_1^2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + 2h_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + h_2^2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2, \\ \nabla\varphi\psi = h_1^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} + h_{12}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\right) + h_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Inoltre si hanno le relazioni

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{E}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}, \\ \dfrac{-F}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{h_{12}}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}, \\ \dfrac{G}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}. \end{cases}$$

Denominando θ l'angolo delle due curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, si hanno anche le formole

$$(38)\qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{h_{12}}{h_1h_2}, \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}{h_1h_2}, \\ E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \dfrac{h_1^2\,dv^2 - 2h_{12}\,du\,dv + h_2^2\,du^2}{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}. \end{cases}$$

dall'ultima delle quali emerge che se si avessero sulla superficie due nuovi sistemi di curve $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, e se le ρ_1, ρ_2 si assumessero come coordinate curvilinee, in vece delle u, v, l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, riferito a queste nuove coordinate, sarebbe

$$\frac{(\Delta_1\rho_2)^2\cdot d\rho_1^2 - 2\nabla\rho_1\rho_2\cdot d\rho_1\,d\rho_2 + (\Delta_1\rho_1)^2\cdot d\rho_2^2}{(\Delta_1\rho_1)^2(\Delta_1\rho_2)^2 - (\nabla\rho_1\rho_2)^2}\ ^{*)}.$$

Per la medesima ragione è lecito supporre, nelle (36), che le u, v anzichè essere

*)Nell'art. XXI delle citate *Disquisitiones generales* etc. GAUSS ha dato le formole per la trasformazione delle coordinate curvilinee. Le ultime tre equazioni del detto articolo potrebbero servire a stabilire l'invariabilità delle espressioni Δ_1, ∇, ragionando secondo i principii precedentemente esposti. Avvertiremo che nella seconda delle tre equazioni di GAUSS bisogna mutare il segno ad uno dei due membri.

le coordinate stesse, sieno due funzioni qualisivogliano di queste coordinate. Comunque si particolarizzino queste funzioni, quelle due formule riprodurranno sempre lo stesso valore per le espressioni $\Delta_1\varphi,\ \nabla\varphi\psi$.

XV.

Supponiamo che sulla superficie il cui elemento lineare è espresso dalla (34) siano tracciati, oltre i due sistemi coordinati, due altri sistemi di curve intersecantisi in ogni punto ad angolo retto. Sieno

$$\rho_1(u,v)=\rho_1, \qquad \rho_2(u,v)=\rho_2$$

le loro equazioni risolute rispetto ai parametri arbitrarii ρ_1 e ρ_2. Avremo le seguenti tre equazioni:

$$(39)\qquad \begin{cases} (\Delta_1\rho_1)^2=\dfrac{E\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}+G\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}, \\ (\Delta_1\rho_2)^2=\dfrac{E\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}+G\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}, \\ 0=E\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v}-F\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v}\right)+G\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u}. \end{cases}$$

Rammentando la proprietà geometrica dei parametri differenziali ed avendo riguardo all'ortogonalità delle curve $\rho_1,\ \rho_2$, si vede essere

$$ds_1=\frac{d\rho_1}{h_1}, \qquad ds_2=\frac{d\rho_2}{h_2},$$

dove $s_1,\ s_2$ sono gli archi delle linee $\rho_1=$ cost., $\rho_2=$ cost., ed $h_1,\ h_2$ sono messi per comodità di scrittura in luogo di $\Delta_1\rho_1,\ \Delta_1\rho_2$. Le $\rho_1,\ \rho_2$ si possono evidentemente riguardare come coordinate curvilinee ortogonali della superficie, e il quadrato dell'elemento lineare riferito ad esse è

$$\frac{d\rho_1^2}{h_1^2}+\frac{d\rho_2^2}{h_2^2},$$

dove $h_1,\ h_2$ si possono considerare come funzioni delle $\rho_1,\ \rho_2$.
Poniamo, per brevità,

$$(40)\qquad \begin{cases} G\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} - F\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v} = M_1, & E\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v} - F\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} = N_1, \\ G\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} - F\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v} = M_2, & E\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v} - F\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} = N_2, \\ EG - F^2 = T^2. \end{cases}$$

Le (39) potranno scriversi nel modo seguente:

$$(41')\qquad \begin{cases} M_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} + N_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v} = T^2h_1^2, \\ M_1\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} + N_1\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

$$(41'')\qquad \begin{cases} M_2\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} + N_2\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v} = 0, \\ M_2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} + N_2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v} = T^2h_2^2. \end{cases}$$

Le (40) danno

$$M_1N_2 - M_2N_1 = T^2\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\right);$$

parimenti dalle (41′), (41″) si deduce

$$(M_1N_2 - M_2N_1)\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\right) = T^4h_1^2h_2^2,$$

il confronto di queste due ultime equazioni porge

$$(42)\qquad \frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial u} = Th_1h_2 :$$

[quest'equazione non è che un caso particolare della formula da cui, nell'art. precedente, venne ricavata la funzione invariabile (35).]

Quando si assumono le ρ_1, ρ_2 come variabili principali, le u, v diventano variabili dipendenti, e le ordinarie formule per la trasformazione delle derivate parziali danno, vista la (42),

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\rho_1} = \dfrac{1}{Th_1h_2}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial v}{\partial\rho_1} = -\dfrac{1}{Th_1h_2}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\rho_2} = -\dfrac{1}{Th_1h_2}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial v}{\partial\rho_2} = \dfrac{1}{Th_1h_2}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}. \end{cases}$$

Altre espressioni delle medesime derivate parziali di $u,\ v$ si hanno dalle (41′, 41″). Infatti moltiplicando le due prime di queste equazioni per $\frac{\partial u}{\partial \rho_1},\ \frac{\partial u}{\partial \rho_2}$ e sommando, indi per $\frac{\partial v}{\partial \rho_1},\ \frac{\partial v}{\partial \rho_2}$ e di nuovo sommando, ed analogamente operando sulle due seconde equazioni anzidette, si ottengono le formole seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = \frac{M_1}{T^2 h_1^2}, & \frac{\partial v}{\partial \rho_1} = \frac{N_1}{T^2 h_1^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = \frac{M_2}{T^2 h_2^2}, & \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = \frac{N_2}{T^2 h_2^2}. \end{cases} \tag{44}$$

Queste formole sono notevoli massimamente per ciò che i valori delle derivate di u e v rispetto a ρ_1 sono dati da esse mediante espressioni che contengono solamente le derivate di ρ_1 rispetto ad u ed a v, non comparendovi quelle della funzione ρ_2. Così dicasi degli altri due valori. Perciò se si ha una funzione qualunque χ di u e v, e se questa funzione si suppone espressa per $\rho_1,\ \rho_2$, coordinate di due sistemi *ortogonali*, le sue derivate parziali rispetto a $\rho_1,\ \rho_2$ potranno esprimersi così:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \rho_1} = \frac{1}{T^2 h_1^2}\left(M_1 \frac{\partial \chi}{\partial u} + N_1 \frac{\partial \chi}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \rho_2} = \frac{1}{T^2 h_2^2}\left(M_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} + N_2 \frac{\partial \chi}{\partial v}\right),$$

od anche, più brevemente, così:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \rho_1} = \frac{\nabla_{\rho_1}\chi}{h_1^2}, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \rho_2} = \frac{\nabla_{\rho_2}\chi}{h_2^2}. \tag{45}$$

Se dunque χ fosse una espressione formata colle $E,\ F,\ G$ e colle derivate della ρ_1 o della ρ_2, le due derivate $\frac{\partial \chi}{\partial \rho_1},\ \frac{\partial \chi}{\partial \rho_2}$ sarebbero due funzioni invariabili, contenenti rispettivamente la funzione ρ_1 o la ρ_2.

Confrontando le formole (43), (44) si ottiene

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial u} = -\frac{N_1 h_2}{T h_1}, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial v} = \frac{M_1 h_2}{T h_1},$$

da cui, eliminando ρ_2, si trae

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1 h_2}{T h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_1 h_2}{T h_1}\right) = 0.$$

ovvero, sviluppando le derivate,

$$\frac{M_1}{T}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)+\frac{N_1}{T}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)+\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1}{T}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_1}{T}\right)\right)=0,$$

od anche, per le (44),

$$Th_1^2\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho_1}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\frac{\partial v}{\partial\rho_1}\right)+\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1}{T}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_1}{T}\right)\right)=0.$$

cioè

$$Th_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)+\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1}{T}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_1}{T}\right)\right)=0.$$

A questa formula, ed a quella che si otterrebbe eliminando ρ_1 con un processo analogo, si può dare la forma seguente:

(46)
$$\begin{cases} h_1^2\dfrac{\partial\log\dfrac{h_1}{h_2}}{\partial\rho_1}=\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{M_1}{T}\right)+\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{N_1}{T}\right)\right), \\ h_2^2\dfrac{\partial\log\dfrac{h_2}{h_1}}{\partial\rho_2}=\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{M_2}{T}\right)+\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{N_2}{T}\right)\right). \end{cases}$$

Ora i primi membri di queste due equazioni sono, o possono considerarsi, come funzioni delle ρ_1,ρ_2; i secondi invece sono funzioni delle u,v. Ogni traccia delle relazioni fra questi due sistemi di variabili è scomparsa. Dunque (art. XIII): *le due funzioni*

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1}{T}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_1}{T}\right)\right),\qquad\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_2}{T}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_2}{T}\right)\right),$$

sono funzioni invariabili. La prima di queste funzioni, oltre le E,F,G e le loro derivate, contiene la funzione ρ_1 (che è arbitraria); la seconda contiene in analoga maniera la funzione ρ_2. Noi le chiameremo *parametri differenziali di secondo ordine* delle funzioni ρ_1,ρ_2 e le denoteremo col simbolo Δ_2 prefisso alle funzioni stesse. In generale dunque, riponendo per M,N,T i loro valori, e considerando una funzione qualunque φ, si ha, come definizione analitica del parametro differenziale di second'ordine di questa

funzione,

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]. \tag{47}$$

Applicando a questa nuova funzione invariabile le considerazioni esposte nell'articolo XIII, si ha il seguente teorema:

Se φ è una funzione assoluta della superficie il cui elemento lineare è

$$\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2},$$

l'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]$$

è una nuova funzione assoluta.

Per verificare la invariabilità di quest'espressione, si può particolarizzare il sistema (u,v) in modo da farlo coincidere col sistema (ρ_1,ρ_2). Ciò si ottiene ponendo

$$u=\rho_1,\qquad v=\rho_2,\qquad E=\frac{1}{h_1^2},\qquad F=0,\qquad G=\frac{1}{h_2^2},$$

e supponendo successivamente $\varphi=\rho_1$, $\varphi=\rho_2$. Infatti si ha in tal modo

$$\Delta_2\rho_1 = h_1h_2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\right),\qquad \Delta_2\rho_2 = h_1h_2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right), \tag{48}$$

espressioni le quali non differiscono che nella forma da quelle che trovansi scritte nei primi membri delle (46).

Del resto se si confronteranno le espressioni $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$ (formate colle ρ_1,ρ_2) colle formule (22) del § XIII delle ammirabili *Leçons sur les coordonnées curvilignes* del sig. Lamé, apparirà giustificata la denominazione che abbiamo imposta a quelle funzioni. Ciò risulterà anche meglio dagli sviluppi che seguono.

XVI.

Facendo uso delle relazioni (37), l'espressione (47) assume la forma:

$$\Delta_2\varphi = \sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}+h_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+h_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}\right)\right]. \tag{49}$$

da cui si cava in particolare

$$\Delta_2 u = \sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_{12}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right)\right],$$

$$\Delta_2 v = \sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_{12}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right)\right].$$

In virtù di queste due ultime formole la precedente può essere messa sotto la forma:

$$\Delta_2\varphi = h_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2h_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + h_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \Delta_2 u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \Delta_2 v\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{50}$$

La formola (49), del pari che la (50), definisce la funzione $\Delta_2\varphi$ in un modo più vantaggioso che la (47). Infatti le u, v che, in quest'ultima equazione, rappresentano le coordinate curvilinee a cui si riferita la superficie, possono, nelle (49), (50), rappresentare due sistemi di curve tracciate comunque sulla superficie stessa indipendentemente dai due sistemi coordinati; poichè siccome queste due ultime formole non contengono, oltre le derivate della φ, che i parametri differenziali delle funzioni u, v, così l'invariabilità di queste espressioni rende indifferente la scelta del primitivo sistema di coordinate. Lo stesso deve dirsi delle formole , (36), rispetto alle analoghe in E, F, G.

Nel caso che le u, v corrispondano a due sistemi ortogonali, si ha $h_{12} = 0$, e però, scambiando u in ρ_1 e v in ρ_2, si ottengono le formole

$$(\Delta_1\varphi)^2 = h_1^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)^2,$$

$$\Delta_2\varphi = h_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2} + \Delta_2\rho_1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} + \Delta_2\rho_2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2};$$

dalla (49) si cava inoltre

$$\Delta_2\varphi = h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)\right].$$

Le prime due di queste ultime formole presentano la più perfetta analogia colle (24), (25) del sig. Lamé (*Coord. curv.* § XIV); la terza corrisponde alla (26) (*ibid.*).

Le funzioni Δ_1, Δ_2 relative ad un certo sistema di curve tracciate sulla superficie possono avere infiniti valori differenti. Infatti il sistema di curve $\varphi = \text{cost.}$ non differisce, geometricamente, dal sistema $f(\varphi) = \text{cost.}$; ma i parametri Δ_1 e Δ_2 sono diffe-

renti secondo che si adotta l'una o l'altra forma. Ed invero si trova facilmente

$$\Delta_1 f(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \Delta_1 \varphi,$$
$$\Delta_2 f(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \Delta_2 \varphi + f''(\varphi) \cdot (\Delta_1 \varphi)^2,$$

formole che presentano una grande analogia con quelle che nel calcolo differenziale, servono alla differenziazione delle funzioni composte

$$df(\varphi) = f'(\varphi) \cdot d\varphi,$$
$$d^2 f(\varphi) = f'(\varphi) \cdot d^2\varphi + f''(\varphi) \cdot d\varphi^2.$$

Questa circostanza, che è massimamente notevole per la funzione Δ_2, rende in certo modo ragione del perchè questa funzione si introduca spontaneamente in un gran numero di ricerche « come se essa, dice il sig. Lamé[*)], fosse una *derivata naturale,* più essenziale, più semplice ed in pari tempo più completa di tutte le derivate parziali che si sogliono considerare e che si scelgono più o meno arbitrariamente ».

I due sistemi ortogonali ρ_1 e ρ_2 non vengono alterati considerando, invece delle corrispondenti variabili ρ_1, ρ_2, le due nuove quantità ρ_1', ρ_2' delle quali la prima dipende solamente da ρ_1, la seconda da ρ_2. In questa ipotesi, dai valori di ds_1, ds_2 dati al principio dell'art. XV si ottiene

$$ds_2 : ds_1 = h_1 \frac{d\rho_1'}{d\rho_1} : h_2 \frac{d\rho_2'}{d\rho_2}.$$

Ciò posto, cerchiamo le condizioni che debbono verificarsi affinchè i due sistemi di curve, mercè una variazione opportuna dei loro parametri, dividano la superficie in quadrati infinitamente piccoli. È chiaro che bisogna poter determinare le funzioni ρ_1' e ρ_2' in modo che si abbia $ds_1 = ds_2$ per $d\rho_1' = d\rho_2'$, ossia che si abbia

$$\log \frac{h_1}{h_2} = \log \frac{d\rho_2'}{d\rho_2} - \log \frac{d\rho_1'}{d\rho_1},$$

da cui

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho_1 \partial\rho_2} \log \frac{h_1}{h_2} = 0;$$

reciprocamente, quando ciò ha luogo, è manifestamente possibile determinare le funzioni ρ_1', ρ_2', poichè $\frac{h_1}{h_2}$ è il prodotto di due funzioni, l'una soltanto di ρ_1, l'altra sol-

[*)] *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859), § XV.

tanto di ρ_2. Ora l'equazione precedente equivale, in virtù delle formole

$$\Delta_2\rho_1 = h_1^2 \frac{\partial \log \frac{h_1}{h_2}}{\partial \rho_1}, \qquad \Delta_2\rho_2 = h_2^2 \frac{\partial \log \frac{h_2}{h_1}}{\partial \rho_2},$$

ad una delle due seguenti:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2}\right) = 0,$$

le quali rientrano l'una nell'altra, in causa della relazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2}\right) = 0,$$

che è una conseguenza immediata dei precedenti valori di $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$: bisogna dunque che il rapporto $\frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2}$ sia funzione solamente di ρ_1. Questa condizione è necessaria e sufficiente, e non richiede punto la conoscenza della funzione ρ_2. Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione analoga ad una conosciuta: affinchè un sistema di curve, $\varphi =$ cost., combinato col suo sistema ortogonale, divida la superficie in quadrati infinitamente piccoli (ben inteso facendo variare opportunamente i parametri dei due sistemi), è necessario e sufficiente che il rapporto

$$\frac{\Delta_2\varphi}{(\Delta_1\varphi)^2}$$

dipenda dalla sola quantità φ. Quando si verifica questa proprietà, le curve del sistema $\varphi =$ cost. si chiamano *isoterme*, in causa delle proprietà che possedono, allorchè si considerano in relazione alla teoria del calore. Quando la precedente condizione è soddisfatta, il valore del rapporto in questione si può mettere sotto la forma $\frac{F'(\varphi)}{F(\varphi)}$, e da una formola già incontrata in questo articolo si deduce

$$\Delta_2 f(\varphi) = \frac{(\Delta_1\varphi)^2}{F(\varphi)}\left[F'(\varphi)\cdot f'(\varphi) + F(\varphi)\cdot f''(\varphi)\right] = \frac{(\Delta_1\varphi)^2}{F(\varphi)}\frac{d[F(\varphi)\cdot f'(\varphi)]}{d\varphi}.$$

Se dunque si determina f in modo che risulti

$$\frac{d[F(\varphi)\cdot f'(\varphi)]}{d\varphi} = 0$$

ossia

$$f(\varphi) = A\int \frac{d\varphi}{F(\varphi)} + B,$$

si otterrà

$$\Delta_2 f(\varphi) = 0,$$

ed il parametro $f(\varphi)$ del sistema di curve isoterme $\varphi =$ cost. acquisterà la proprietà di avere il suo Δ_2 eguale a zero. Quando ciò ha luogo (nel qual caso è chiaro che in luogo del parametro f si può prendere una sua funzione lineare) il parametro stesso si dirà *termometrico* (seguendo l'analogia delle denominazioni usate dal sig. Lamé). Così, se le variabili ρ_1, ρ_2 sono i parametri termometrici di due sistemi isotermi ortogonali, dalla definizione di questi parametri e dalle (48) risulta

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = 0,$$

donde consegue che il rapporto $h_1 : h_2$ è costante, e che quindi si può supporre $h_1 = ah$, $h_2 = bh$, dove h è una funzione di ρ_1, ρ_2, ed a, b sono costanti. Se dunque si trasformano le variabili linearmente, ponendo

$$\rho_1 = au + a', \qquad \rho_2 = bv + b',$$

il quadrato dell'elemento lineare assume la forma

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2}, \tag{51}$$

e le u, v possono ancora considerarsi come i parametri termometrici di due sistemi isotermi ortogonali. È chiaro che, supponendo eguali fra loro gli incrementi du, dv, la superficie viene così ad essere divisa in quadrati infinitamente piccoli.

Quando il quadrato dell'elemento lineare ha la forma (51), si hanno le formole semplicissime

$$(\Delta_1 \varphi)^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right], \qquad \Delta_2 \varphi = h^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right),$$

da cui si deduce

$$\frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}.$$

Questo rapporto, che deve essere funzione della sola φ affinchè le linee $\varphi =$ cost. siano isoterme, ha la stessa forma di quello che si ottiene pei sistemi cilindrici, quando u e v esprimono coordinate rettangole.

È degno d'essere notato che l'integrazione dell'equazione alle derivate parziali di

2° ordine

$$\frac{\Delta_2\varphi}{(\Delta_1\varphi)^2} = \frac{F'(\varphi)}{F(\varphi)}.$$

(in cui la funzione F è data e la φ è incognita), può sempre farsi dipendere dall'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria fra due variabili e da una quadratura. Infatti siano Π, Π' i due fattori immaginarii coniugati dell'espressione quadratica

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

e sia $U + iV =$ cost. l'integrale dell'equazione differenziale ordinaria $\Pi = 0$, dove U e V denotano due funzioni reali di u e di v. Si avrà evidentemente

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \frac{1}{H^2}\,(dU^2 + dV^2),$$

dove H è una certa funzione finita di u, v facilmente determinabile. Rappresentiamo ora con Φ il risultato che si otterrebbe esprimendo φ in funzione delle U, V. Siccome le due funzioni $\Delta_1\varphi$, $\Delta_2\varphi$ sono invariabili, così si possono trasformare immediatamente le variabili nella proposta equazione, e si ottiene

$$\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial U^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}}{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial U}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial V}\right)^2} = \frac{F'(\Phi)}{F(\Phi)}.$$

Ora quest'equazione può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2}{\partial U^2}\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)} + \frac{\partial^2}{\partial V^2}\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)} = 0,$$

e di questa è noto essere l'integrale generale

$$\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)} = P(U + iV) + Q(U - iV).$$

Dunque per effettuare completamente l'integrazione dell'equazione proposta basta poter integrare l'equazione differenziale ordinaria $\Pi = 0$, e determinare l'integrale $\displaystyle\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)}$.

XVII.

Indicando con ρ il parametro termometrico di una famiglia di curve tracciate sulla superficie (51), si deve avere

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}=0,$$

da cui

$$\rho=\frac{\varphi(u+iv)+\psi(u-iv)}{2}. \tag{52}$$

Affinchè ρ risulti reale, bisogna che le due funzioni φ e ψ si cangino l'una nell'altra pel cambiamento di $+i$ in $-i$. In questa ipotesi ponendo

$$\rho'=\frac{\varphi(u+iv)-\psi(u-iv)}{2i},$$

si ottiene anche per ρ' un valore reale, ed è evidente che ρ' è il parametro termometrico di una seconda famiglia di curve isoterme. Ora da queste formole si cava

$$\rho+i\rho'=\varphi(u+iv),\qquad \rho-i\rho'=\psi(u-iv),$$

e quindi, osservando che φ' e ψ' sono quantità coniugate,

$$d\rho^2+d\rho'^2=(\mathrm{mod}\,\varphi')^2\,(du^2+dv^2).$$

Questo risultato ci insegna che i due sistemi isotermi ρ e ρ' sono ortogonali fra loro.

Indichiamo ora con ds l'elemento di una linea passante pel punto (u,v), e con θ l'angolo ch'esso fa coll'elemento della $v=$ cost.; si ha

$$du=h\cos\theta\,ds,\qquad dv=h\,\mathrm{sen}\,\theta\,ds$$

e quindi

$$\mathrm{sen}\,\theta\,du-\cos\theta\,dv=0. \tag{53}$$

Di qui risulta che l'equazione

$$\mu=u\,\mathrm{sen}\,\theta-v\cos\theta+c$$

(dove μ è un parametro arbitrario) rappresenta un sistema di curve che tagliano quelle del sistema isotermo $v=$ cost. sotto l'angolo *costante* θ. Quest'equazione può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mu=\frac{\left(c\,e^{i\theta}-\dfrac{u+iv}{i}\right)e^{-i\theta}+\left(c\,e^{-i\theta}+\dfrac{u-iv}{i}\right)e^{i\theta}}{2}.$$

donde consegue che μ è il parametro termometrico di un sistema di curve isoterme. Siccome l'espressione di μ non contiene traccia della quantità h, che definisce il doppio sistema (u, v), e suppone solamente che le variabili u, v dieno all'elemento la forma (51), così l'equazione più generale

$$\mu = \rho \operatorname{sen}\theta - \rho' \cos\theta + c$$

rappresenta un sistema di curve che tagliano quelle del sistema $\rho' = \text{cost.}$ sotto l'angolo costante θ.

Queste proprietà, che si possono anche dedurre immediatamente dal fecondo principio di Gauss[*)], potrebbero reciprocamente servire a stabilirlo geometricamente. Esse risultano anche molto semplicemente dalla proprietà che hanno due sistemi u e v (oppure ρ, ρ') di dividere la superficie in quadrati infinitamente piccoli.

Le formole precedenti stabiliscono una evidente analogia fra gli infiniti sistemi isotermi che segano sotto un angolo costante un sistema isotermo dato, e gli infiniti sistemi di rette parallele che si possono tracciare in un piano. Questa analogia si estende ad altri sistemi isotermi, come avremo occasione di vedere. Così per es. le due equazioni

$$\alpha = \log \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c}, \qquad \beta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u},$$

rappresentano due sistemi isotermi ortogonali di cui α e β sono i parametri termometrici. Sostituendo x ed y ad u e v si avrebbero le ordinarie coordinate isoterme polari nel piano.

Notiamo anche quest'altro risultato. Chiamando θ l'angolo (variabile) del sistema isotermo $\rho = \text{cost.}$ col sistema $v = \text{cost.}$, si ha dalla (53)

$$\cos\theta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

ossia, ponendo per un istante $u + iv = p$, $u - iv = q$,

$$e^{i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial p} + e^{-i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0,$$

da cui, supponendo che ρ abbia il valore (52),

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\log \varphi' - \log \psi'}{2i}.$$

[*)] *Allgemeine Auflösung ecc.* nelle *Astronomischen Abhandlungen*, 3 Heft, Altona 1825. Una traduzione di questa importante Memoria trovasi nel tomo IV degli *Annali di Matematica pura ed applicata* (1861), pag. 214.

Di qui si scorge che l'angolo θ, considerato come una funzione di u e di v, è il parametro termometrico di un sistema di curve isoterme, il quale dipende in un modo semplice dal sistema primitivo ρ. Possiamo dunque enunciare questo teorema: *le linee luoghi geometrici dei punti in cui è costante l'angolo di due sistemi isotermi tracciati sopra una superficie qualunque, costituiscono un sistema isotermo*. In questo teorema è compreso quello che il sig. Haton de la Goupillière[*)] ha dato rispetto alle linee piane da lui chiamate *isocliniche*.

Il sistema isotermo ortogonale

$$\nu = \frac{\log\varphi' + \log\psi'}{2} = \log \operatorname{mod} \varphi'$$

è costituito dalle linee lungo le quali l'angolo θ varia più rapidamente che in ogni altra direzione: esse corrispondono alle *isodinamiche* del sig. Haton.

Ritorniamo all'ipotesi delle coordinate u e v qualsivogliano, ed adottiamo la forma (38) dell'elemento lineare. L'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{h_1}{h_2} = 0,$$

la quale, nel caso delle coordinate ortogonali, esprime la condizione della loro isotermia, definisce, nel caso delle coordinate oblique, una proprietà delle medesime che comprende l'isotermia come caso particolare. È chiaro infatti che quando la precedente condizione è soddisfatta identicamente, è possibile surrogare ad u una funzione di u ed a v una funzione di v, per modo da rendere $h_1 = h_2$. Ne risulta che, determinando convenientemente gli incrementi du, dv, la superficie viene ad essere divisa in rombi infinitamente piccoli.

Supponiamo dunque $h_1 = h_2 = h$. Osservando le (38) si vedrà che al quadrato dell'elemento lineare può in questo caso darsi la forma:

$$\frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\theta}{h^2\operatorname{sen}^2\theta},$$

e ponendo

$$u + v = 2p, \qquad u - v = 2q,$$

da cui

$$u = p + q, \qquad v = p - q.$$

[*)] *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXII, cahier 38 (1861), pag. 23.

quest'altra

$$\frac{dp^2}{h^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{dq^2}{h^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Questo risultato ci insegna che le curve $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$ sono ortogonali fra loro. Esse hanno inoltre le proprietà d'essere dirette secondo le diagonali dei rombi infinitesimi che sono tracciati sulla superficie dalle curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$

Infatti denominando ds_u, ds_v gli elementi delle curve $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, si ha

$$du = h \operatorname{sen} \theta \, ds_u, \qquad dv = h \operatorname{sen} \theta \, ds_v,$$

quindi

$$2\,dp = h \operatorname{sen} \theta \, (ds_u + ds_v),$$

$$2\,dq = h \operatorname{sen} \theta \, (ds_u - ds_v).$$

Dunque per le linee $q = \text{cost.}$ si ha $ds_u = ds_v$, e per le linee $p = \text{cost.}$, $ds_u = -ds_v$, donde risulta che le linee $q = \text{cost.}$ sono le bissetrici interne dell'angolo θ, mentre le $p = \text{cost.}$ sono le sue bissetrici esterne.

Merita d'essere particolarmente menzionato il caso in cui i due sistemi $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono costituiti da curve parallele geodeticamente fra loro. In questo caso, determinando convenientemente i parametri di questi due sistemi, si può prendere $h_1 = h_2 = 1$ (vedi art. IV); e siccome quando ciò ha luogo le u, v rappresentano le distanze geodetiche del punto qualunque (u, v) dalle curve iniziali $u = 0$, $v = 0$, così la proprietà ora dimostrata conduce a questo teorema:*i due sistemi formati dalle curve luoghi geometrici dei punti di cui è costante la somma o la differenza delle distanze geodetiche da due curve fisse tracciate sopra una superficie qualunque, sono ortogonali fra loro.*

In questo teorema, già enunciato dal sig. Weingarten[*)], è compreso quello ritrovato dal sig. Betti[**)], nel caso che le due curve fisse riducansi a due punti, ovvero che l'una sola d'esse si riduca ad un punto.

XVIII.

È ora noto generalmente che s'intenda per *curvatura geodetica* di una linea tracciata sopra una superficie. Fra le varie definizioni che se ne possono dare[***)], ci ac-

[*)] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXII (1863), pag. 166.

[**)] *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. III (1860), pag. 336.

[***)] Il lettore potrà trovare enumerate ed accuratamente discusse nei §§ 714–718 del *Trattato di calcolo differenziale* del sig. Bertrand.

conterremo perciò di richiamare la seguente, che conduce molto spontaneamente alla ricerca della sua espressione analitica: *la curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie è la projezione della curvatura assoluta sul piano tangente alla superficie nel punto che si considera.* In altre parole, fra gli infiniti raggi delle sviluppate della linea data, uno esiste nel piano tangente alla superficie: la curvatura geodetica è l'inversa di questo raggio[*)].

Partendo da questa definizione si trova facilmente[**)] che se la superficie è riferita a due sistemi di curve ortogonali ρ_1 e ρ_2, cosicchè il suo elemento lineare abbia la forma:

$$\sqrt{\frac{d\rho_1^2}{h_1^2}+\frac{d\rho_2^2}{h_2^2}},$$

chiamando $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ le curvature geodetiche delle linee $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, si ha

(52') $$\frac{1}{r_1} = h_1 h_2 \frac{\partial \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{1}{r_2} = -h_1 h_2 \frac{\partial \frac{1}{h_1}}{\partial \rho_2}.$$

Rispetto ai segni di queste curvature, è da ritenersi che essi risultano positivi quando la convessità delle curve $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$ è rivolta da quella parte verso cui cresce il parametro del sistema rispettivo.

Se le curve di uno dei sistemi, per es. le $\rho_2 = \text{cost.}$, sono geodetiche, si ha (art. IV)

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2}\frac{1}{h_1} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{r_2} = 0.$$

Questa proprietà deriva anche immediatamente dalla stessa definizione della curvatura geodetica.

Prima di proceder oltre esporremo una proprietà della curvatura geodetica, dalla quale scaturisce una nuova definizione geometrica di questo ente.

La tangente alla curva $\rho_2 = \text{cost.}$ può rappresentarsi colle equazioni

$$x = \xi + r\, h_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1'}, \qquad y = \eta + r\, h_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_1'}, \qquad z = \zeta + r\, h_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_1'},$$

[*)] Alcuni scrittori inglesi adoperano la denominazione di *curvatura tangenziale*. Se l'appellativo di *geodetica* non fosse già ricevuto nell'uso comune, avremmo preferito quest'altro, a parer nostro meglio appropriato. La *curvatura normale* è, secondo i medesimi scrittori, la projezione della curvatura assoluta sul piano normale, ossia la curvatura della sezione normale che contiene la tangente della linea considerata.

[**)] BRIOSCHI, *Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie*, Art. 7 [*Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* (di TORTOLINI), t. III (1852), pag. 293].

in cui r rappresenta la distanza dal punto qualunque (ξ, η, ζ) di questa retta al punto di contatto (x, y, z), misurata nel senso in cui si va dal primo al secondo.

Si immagini il sistema delle linee che hanno le tangenti coniugate colle $\rho_2 = \text{cost.}$ Le tangenti a due curve consecutive di quest'ultimo sistema, nei punti in cui le curve stesse sono tagliate da una delle curve coniugate, s'incontrano in un punto. Indichiamo con $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ gli incrementi che ricevono ρ_1 e ρ_2 quando si passa dal punto (ρ_1, ρ_2) al punto contiguo, lungo la coniugata della linea $\rho_2 = \text{cost.}$ Supponendo che ξ, η, ζ siano le coordinate del punto comune alle due tangenti consecutive, gli incrementi $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sono nulli, e si ha quindi

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial x}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 = h_1\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\delta r + r\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\delta h_1 + h_1\,\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 = h_1\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\delta r + r\left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\delta h_1 + h_1\,\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 = h_1\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\delta r + r\left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\delta h_1 + h_1\,\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right),$$

da cui, moltiplicando per $\frac{\partial x}{\partial \rho_2}, \frac{\partial y}{\partial \rho_2}, \frac{\partial z}{\partial \rho_2}$ e sommando con riguardo alla

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = 0,$$

si ottiene

$$\frac{\delta\rho_2}{h_2^2} = h_1\, r\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\,\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\,\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\,\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right).$$

Ma dall'equazione precedente e dalle

$$\frac{1}{h_1^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2,$$

$$\frac{1}{h_2^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2,$$

si deduce facilmente

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\,\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\,\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\,\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{1}{h_2}\right)\delta\rho_2 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{1}{h_1}\right)\delta\rho_1,$$

dunque sostituendo

(53') $$\frac{\delta\rho_2}{h_2^2} = h_1\, r\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{1}{h_2}\right)\delta\rho_2 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{1}{h_1}\right)\delta\rho_1\right).$$

Se le linee del sistema $\rho_2 =$ cost. sono geodetiche, si ha

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2}\frac{1}{h_1} = 0,$$

e quindi

$$\frac{1}{r_1} = h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{1}{h_2}.$$

Ora il secondo membro di quest'equazione non è (52') che la curvatura geodetica della linea $\rho_1 =$ cost. Abbiamo dunque il seguente teorema[*)]:

Sia ... $a_1 a a_1'$ ... *una curva qualunque, tracciata sopra una superficie. Da ciascun punto di essa si facciano partire le linee geodetiche ortogonali* ... $a_1 b_1$, ab, $a'b'$, ... *e si faccia passare pel punto* (a) *una linea* aa' *tangente con queste linee geodetiche. Il punto C, in cui la tangente in* (a) *alla geodetica* ab *è incontrata dalla tangente alla geodetica infinitamente vicina nel punto* (a') *comune a questa ed alla linea coniugata* ... $a_1 a a'$ ..., *è il centro della curvatura geodetica della linea* ... $a_1 a a'$ ... *nel punto* (a).

(Quando la superficie è piana, le geodetiche ortogonali diventano le rette normali alla curva ... $a_1 a a'$ ..., ed il teorema precedente si converte in quello notissimo relativo al centro dell'ordinaria curvatura.)

Supponendo $h_1 = 1$, ciò che è lecito nelle ipotesi ammesse, si ha semplicemente

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\partial}{\partial \rho_1}\log h_2. \tag{54}$$

L'espressione della curvatura geodetica è una funzione delle h_1, h_2 e delle loro derivate rapporto a ρ_1, ρ_2. Essa è dunque una quantità che non viene alterata da ogni flessione della superficie alla quale essa si riferisce. È questa una delle ragioni che ne rendono importantissima la considerazione.

XIX.

I risultati dell'articolo precedente conducono molto spontaneamente alla dimostrazione dei teoremi del sig. Weingarten, cui abbiamo già fatto allusione alla fine dell'art. VI.

Consideriamo infatti una superficie qualunque (S), ed il luogo (Σ) dei suoi centri, relativi ad uno dei sistemi di linee di curvatura. Sia (L) una linea di curvatura dell'altro sistema ed M, M' due punti contigui di questa linea. Le normali in questi punti alla superficie (S) si incontrano in un punto C, centro di curvatura della se-

[*)] Il lettore è pregato di fare la figura, che gioverà anche all'intelligenza dell'articolo seguente.

zione normale tangente alla linea (L) nel punto M. Inoltre tutte le normali della superficie (S) nei punti della linea (L) toccano la superficie (Σ) lungo una linea $\dots a_1aa' \dots$ che ha le tangenti coniugate colle linee geodetiche $\dots a_1b_1,\ ab,\ a'b', \dots$ inviluppate, sulla superficie (Σ), dalle normali della superficie (S). Ne risulta che i due raggi principali $R_1,\ R_2$ della superficie (S) nel punto M sono (art. precedente)

$$R_1 = aM, \qquad R_2 = CM = R_1 + r_1,$$

donde, per la (54),

$$R_2 - R_1 = -\frac{\partial \log h_2}{\partial \rho_1},$$

ammesso che $\sqrt{d\rho_1^2 + \frac{d\rho_2^2}{h_2^2}}$ sia l'elemento lineare della superficie (Σ), riferita alle coordinate geodetiche ρ_1 e ρ_2, la prima delle quali rappresenti l'arco di geodetica $\dots ab \dots$, contato da una traiettoria ortogonale arbitraria, e la seconda sia un parametro che serve ad individuare le singole geodetiche.

Ciò posto, pel teorema dimostrato alla fine dell'art. VII, R_1 è costante lungo ciascuna delle linee $\rho_1 = \text{cost.}$, anzi da ciò che si è esposto nel detto articolo (nonchè dall'ordinaria teoria delle sviluppate) risulta che si può sempre porre

$$-R_1 = \rho_1 \text{ *)},$$

purchè si determini convenientemente quella traiettoria dai punti della quale vengono contati gli archi geodetici ρ_1. Le espressioni dei due raggi principali di curvatura sono dunque

$$R_1 = -\rho_1, \qquad R_2 = -\rho_1 - \frac{\partial \log h_2}{\partial \rho_1}.$$

Se ora supponiamo che la superficie (S) sia tale che il valore di uno dei raggi di curvatura, R_2, sia in ciascun punto determinato con una legge costante dal valore dell'altro, cioè se supponiamo

$$R_2 = \varphi(R_1),$$

*) Si vedrà facilmente che R_1 e ρ_1 si prendono con segno contrario per restare in accordo colla convenzione che ha servito a fissare il segno della curvatura geodetica. Credo di dover qui far notare che il sig. Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XXVIII.) ha adottato la convenzione contraria. Io ho seguito l'esempio del sig. Bertrand (*Traité de calcul différentiel*, §§ 509, 556, 739).

la seconda delle precedenti equazioni si potrà scrivere così:

$$\frac{\partial \log \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)},$$

da cui si deduce

$$\frac{1}{h_2} = H e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}},$$

dove H è una funzione arbitraria di ρ_2, la quale può evidentemente supporsi uguale ad 1, senza limitare la generalità dei risultati, poichè ciò equivale a prendere per seconda variabile $\int H\, d\rho_2$ in luogo di ρ_2. Si ha dunque

$$\frac{1}{h_2} = e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}} = \psi(\rho_1),$$

londe il quadrato dell'elemento lineare della superficie (Σ) assume la forma

$$d\rho_1^2 + [\psi(\rho_1)]^2\, d\rho_2^2,$$

da cui risulta che la superficie (Σ) è applicabile sopra una superficie di rivoluzione. Dunque: *i luoghi dei centri di curvatura di quelle superficie, in ciascun punto delle quali uno dei raggi di curvatura principali è una determinata funzione dell'altro, sono superficie applicabili tutte l'una sull'altra e sopra certe superficie di rivoluzione*[*)].

Reciprocamente, consideriamo una superficie di rivoluzione arbitraria (Σ). Il sistema di rette costituito dalle tangenti ai suoi meridiani è incontrato normalmente (art. VII) da una serie di superficie parallele (S), ciascuna delle quali possiede la proprietà che uno dei suoi raggi principali di curvatura, per es. R_2, è una funzione determinata dell'altro, R_1. Infatti uno di questi raggi, per es. R_1, può ritenersi eguale in lunghezza assoluta all'arco di meridiano ρ_1 contato dal certo parallelo e terminato al punto di contatto fra la superficie (Σ) e la normale secondo cui è diretto il raggio stesso. L'altro raggio di curvatura è eguale al precedente aumentato (o diminuito) del raggio di curvatura geodetica r_1 del parallelo condotto pel punto di contatto, il qual ultimo raggio avendo per misura la porzione di tangente al meridiano compresa fra questo punto di contatto e l'asse di rotazione, è una funzione del solo arco di meridiano ρ_1, e quindi anche del solo primo raggio R_1. Dunque ciascuno dei due raggi è in ogni punto determinato unicamente dall'altro.

[*)] Dal processo di dimostrazione risulta chiaramente che *in generale* le due falde della superficie dei centri non sono applicabili sopra una *medesima* superficie di rivoluzione. Questo si verificherebbe quando la relazione fra R_1 ed R_2 fosse simmetrica rispetto a queste due quantità.

Ciò posto se la superficie (Σ), supposta flessibile ed inestendibile, viene a mutare di forma, e se le tangenti ai suoi meridiani si considerano, durante questa flessione, come invariabilmente connesse alla superficie medesima, i punti in cui queste tangenti erano primitivamente incontrate da una delle superficie (S), continuano sempre ad avere per luogo geometrico una superficie ortogonale a tutte le tangenti anzidette (in virtù dei teoremi dati all'art. VI). Inoltre in ciascuno di questi punti i raggi principali di curvatura continuano sempre a coincidere coi segmenti che abbiamo denominato R_1 ed R_2, poichè la normale in M non cessa d'essere incontrata da due normali infinitamente vicine negli estremi a e C di quei segmenti, ossia in due punti la cui posizione non dipende che dall'arco ρ_1 e dalla curvatura geodetica r_1, quantità che non vengono alterate dalla flessione. È dunque manifesto che la relazione sussistente originariamente fra questi due raggi, continua ad avere luogo comunque s'inflette la superficie (Σ), e questa conclusione si mantiene vera fino a tanto che le flessioni della superficie (Σ) son tali da dar luogo realmente alla generazione di una superficie (S), ciò che, in generale, avviene per tutte le flessioni di cui la superficie (Σ) è suscettibile. Dunque in generale *tutte le superficie applicabili sopra una data superficie di rivoluzione possono riguardarsi come luoghi dei centri di curvatura di altre superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni determinate l'uno dell'altro.*

Ma la conclusione in cui si fonda questa reciproca cessa d'essere esatta, quando la superficie (Σ) è tale, che certe sue flessioni rendono impossibile la generazione di una superficie ortogonale (S). Affinchè tale impossibilità si verifichi, bisogna che il sistema delle tangenti alle linee ρ_1 cessi d'occupare tutto lo spazio, e si riduca ad una famiglia di rette con un solo parametro arbitrario. Perchè ciò succeda bisogna evidentemente che le tangenti a ciascuna delle linee ρ_1 vengano a coincidere in una sola retta, cioè che le linee geodetiche ρ_1 possano, per certe flessioni della superficie (Σ), diventare linee rette. Bisogna dunque, in ultima analisi, che la superficie (Σ) sia sovrapplicabile ad una superficie rigata. Ora è noto che il quadrato dell'elemento lineare d'ogni superficie rigata, a generatrici rettilinee reali, può mettersi sotto la forma:

$$ds^2 = d\rho_1^2 + \left[(\rho_1 - \alpha)^2 + \beta^2\right] d\rho_2^2,$$

dove ρ_1 è la lunghezza di una porzione di generatrice rettilinea, contata da una traiettoria ortogonale fissa, ρ_2 è un parametro che distingue le varie generatrici, α e β sono due funzioni della sola variabile ρ_2. Affinchè tale espressione coincida con quella dell'elemento d'una superficie di rivoluzione, colla condizione che le generatrici rettilinee si sovrappongano ai meridiani, bisogna evidentemente che α e β siano quantità costanti: ciò che corrisponde ad una special classe di superficie rigate applicabili sull'elicöide a piano direttore e sulla superficie di rivoluzione d'area minima. Confron-

tando la forma speciale che assume in questo caso la funzione $\psi(\rho_1)$, cioè

$$\psi(\rho_1) = \sqrt{(\rho_1 - \alpha)^2 + \beta^2},$$

col valore

$$\psi(\rho_1) = e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}},$$

si perviene facilmente all'equazione

$$(R_1 + \alpha)(R_2 + \alpha) = -\beta^2,$$

la quale esprime, come è manifesto, che la superficie (S) è parallela e distante della quantità α da una superficie di curvatura costante e negativa $-\frac{1}{\beta^2}$. Siccome le infinite superficie parallele ad una data hanno tutte i medesimi luoghi dei centri di curvatura, così si vede che il caso eccezionale ora discusso corrisponde a quelle relazioni fra i due raggi principali di curvatura della superficie (S) alle quali può servire di tipo la seguente:

$$R_1 R_2 = -\alpha^2 \text{*)}.$$

Dal fin qui detto concludiamo, col sig. Weingarten, che in generale ogni superficie applicabile sopra una data superficie di rivoluzione può considerarsi come il luogo dei centri di curvatura di un'altra superficie, in ciascun punto della quale i due raggi principali di curvatura hanno fra loro una determinata relazione, dipendente dalla forma del meridiano della superficie data. Nel solo caso in cui questa sia la superficie di rivoluzione d'area minima, per ottenere tutte le superficie sovr'essa applicabili, bisogna associare agli anzidetti luoghi dei centri di curvatura, una special classe di superficie rigate.

Osserveremo per ultimo che l'integrale indefinito

$$\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}$$

introduce in ψ come fattore una costante arbitraria. Nei casi particolari accade spesso (come vedremo) che il valore di questa costante venga limitato dalla condizione che la superficie rappresentata dall'espressione

$$ds^2 = d\rho_1^2 + [\psi(\rho_1)]^2 \, d\rho_2^2$$

sia reale.

*) Le superficie a curvatura costante negativa sono state recentemente l'oggetto d'interessanti ricerche per parte del sig. Dini. Alcuni dei suoi risultati sono consegnati nei *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, t. LX (1865), pag. 340.

XX.

Chiamiamo $R'_1,\ R'_2$ i raggi principali di curvatura della superficie di rivoluzione fin qui denominata (Σ), sulla quale sono applicabili le evolute delle superficie definite dall'equazione

$$R_2 = \varphi(R_1),$$

e propriamente sia R'_1 il raggio di curvatura del meridiano, R'_2 quello della sezione normale al meridiano. Indichiamo inoltre con ψ il raggio del parallelo della superficie (Σ), il quale è una funzione nota dell'arco di meridiano ρ_1, avendosi dall'articolo precedente

$$\psi = e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}}.$$

Da formule notissime si deducono facilmente per $R'_1,\ R'_2$ i valori seguenti:

$$R'_1 = -\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{d\psi}{d\rho_1}\right)^2}}{\frac{d^2\psi}{d\rho_1^2}}, \qquad R'_2 = \frac{\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\psi}{d\rho_1}\right)^2}},$$

in cui il radicale dev'esser preso positivamente. Ora, ponendo per brevità,

$$\frac{d\varphi(-\rho_1)}{d\rho_1} = \varphi',$$

si ha

$$\frac{d\psi}{d\rho_1} = \frac{\psi}{\rho_1 + \varphi}, \qquad \frac{d^2\psi}{d\rho_1^2} = -\frac{\psi\varphi'}{(\rho_1 + \varphi)^2},$$

dunque sostituendo si ottiene

$$R'_1 = \frac{(\rho_1 + \varphi)\sqrt{(\rho_1 + \varphi)^2 - \psi^2}}{\psi\varphi'},$$

$$R'_2 = \frac{(\rho_1 + \varphi)\psi}{\sqrt{(\rho_1 + \varphi)^2 - \psi^2}}.$$

Da questi valori si trae

$$R'_1 R'_2 = \frac{(\rho_1 + \varphi)^2}{\varphi'}, \qquad \frac{R'_1}{R'_2} = \frac{(\rho_1 + \varphi)^2 - \psi^2}{\psi^2\varphi'}. \tag{55}$$

Queste formule determinano i raggi principali della superficie di rivoluzione (Σ), in funzione di ρ_1. Eliminando questa variabile si ottiene la relazione costante che sus-

siste in ogni punto fra i raggi stessi. Reciprocamente, se si ammette fra R_1' ed R_2' una relazione determinata, eliminandone queste due quantità col mezzo delle formule precedenti, si ottiene un'equazione alle derivate del prim'ordine fra ρ_1 e la funzione incognita φ, integrando la quale si perviene ad assegnare la forma della funzione $\varphi(R_1)$, ossia la relazione che deve sussistere fra i due raggi principali di curvatura di una superficie affinché una delle sue evolute sia applicabile sopra una classe di superfici di rivoluzione caratterizzata dalla prescritta relazione fra R_1' ed R_2'; colla condizione però che le linee geodetiche luoghi dei centri di curvatura sulle evolute stesse si dispongano secondo i meridiani di quest'ultima superficie [*].

Per dare un esempio di questi due processi, ne faremo l'applicazione alla ricerca delle evolute e delle evolventi delle superficie di curvatura costante.

Incominciando dalla prima questione, poniamo

$$R_1 R_2 = \pm k^2,$$

intendendo per k una quantità positiva. In questo caso si ha

$$\varphi(R_1) = \pm\frac{k^2}{R_1},$$

quindi

$$\varphi(-\rho_1) = \mp\frac{k^2}{\rho_1},$$

da cui

$$\varphi' = \pm\frac{k^2}{\rho_1^2}, \qquad \rho_1 + \varphi = \frac{\rho_1^2 \mp k^2}{\rho_1}, \qquad \psi = \frac{\sqrt{\rho_1^2 \mp k^2}}{c},$$

dove c è una costante arbitraria, che supponiamo positiva. Dall'attuale valore di ψ si cava

$$\frac{d\psi}{d\rho_1} = \frac{\rho_1}{c\sqrt{\rho_1^2 \mp k^2}},$$

e siccome il primo membro esprime il coseno dell'angolo che la normale alla superficie (Σ) fa coll'asse di rotazione, così si deve avere

$$\frac{\rho_1^2}{c^2(\rho_1^2 \mp k^2)} < 1$$

ossia

$$(c^2 - 1)\rho_1^2 > \pm c^2 k^2.$$

[*] Questa restrizione è imposta dalle circostanze nelle quali si verifica il teorema del sig. Weingarten. Ma da questo stesso teorema emerge che quando questa restrizione vien tolta, non ha più luogo in generale la proprietà che i due raggi principali della superficie evolvente sieno funzioni l'uno dell'altro.

Ne risulta che quando la superficie primitiva (S) ha la curvatura costante *positiva*, bisogna che si abbia sempre $c^2 > 1$.

Dai valori trovati precedentemente si deduce, per le (XX.),

$$R'_1 R'_2 = \pm\frac{(\rho_1^2 \mp k^2)^2}{k^2}, \qquad 1 + \frac{R'_1}{R'_2} = \pm\frac{(c^2-1)(\rho_1^2 \mp k^2)}{k^2}.$$

La prima di queste due formule mostra che la curvatura della superficie (Σ) ha lo stesso segno di quella della superficie (S). Eliminando ρ_1 fra le due ultime equazioni si ha

$$\left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right)^2 = \pm\left(\frac{c^2-1}{k}\right)^2 R'_1 R'_2,$$

equazione la quale esprime la relazione che lega i raggi di curvatura principali della superficie di rivoluzione su cui sono applicabili le evolute delle superficie di curvatura costante $\pm\frac{1}{k^2}$.

Se la costante c si può prendere eguale all'unità, l'equazione precedente si riduce alla semplicissima

$$R'_1 + R'_2 = 0,$$

la quale caratterizza, come è noto, le superficie d'area minima. Ora noi abbiamo veduto che quando la curvatura della superficie (S) è positiva si ha necessariamente $c^2 > 1$. Quando invece la curvatura anzidetta è negativa si può sempre render nullo il binomio $c^2 - 1$. Dunque: *le evolute delle superficie di curvatura costante negativa sono applicabili sulla superficie di rivoluzione d'area minima*, teorema che si era già presentato alla fine dell'articolo precedente, e che venne pure notato dai signori WEINGARTEN[*)] e DINI[**)].

Fatta astrazione da questo caso particolare, non sembra che la natura della relazione trovata fra R'_1, R'_2, alla quale si può dare anche la forma

$$\left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}\right)^2 = \pm\left(\frac{c^2-1}{k}\right)^2 \frac{R'_2}{R'_1},$$

sia suscettibile di ricevere una interpretazione geometrica abbastanza semplice.

Passiamo ora a trattare il problema inverso, cioè a ricercare le evolventi delle superficie di curvatura costante. E qui gioverà rammentare innanzi tutto, per evitare ogni equivoco, che il metodo di cui ci serviamo, non può fornire se non quella classe di evolventi alla quale si applica la restrizione precedentemente accennata riguardo al caso generale.

[*)] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIX (1861), pag. 382.

[**)] Comptes rendus, t. LX, l. c. nell'art. prec.

Supponiamo dunque che le quantità $R'_1,\ R'_2$ siano legate dalla relazione

$$R'_1 R'_2 = \pm k^2,$$

la quale, in virtù della prima formula (XX.), conduce all'equazione alle derivate

$$\frac{(\rho_1 + \varphi)^2}{\varphi'} = \pm k^2.$$

Introduciamo una funzione ausiliare λ di ρ_1, ponendo

$$\rho_1 + \varphi = \mp \frac{k^2 \lambda'}{\lambda}.$$

Facendo questa sostituzione, l'equazione precedente si trasforma in quest'altra

$$\lambda'' = \mp \frac{\lambda}{k^2}.$$

Prendiamo dapprima il segno superiore, che corrisponde al caso della curvatura positiva. In tale ipotesi si deduce da questa equazione

$$\lambda = A e^{\frac{i\rho_1}{k}} + B e^{-\frac{i\rho_1}{k}},$$

dove A e B sono costanti arbitrarie. Questo valore di λ conduce immediatamente a quello di φ. Si ha infatti

$$\varphi(-\rho_1) = -\rho_1 - ik \frac{A e^{\frac{i\rho_1}{k}} - B e^{-\frac{i\rho_1}{k}}}{A e^{\frac{i\rho_1}{k}} + B e^{-\frac{i\rho_1}{k}}},$$

e quindi, introducendo i due raggi di curvatura dell'evolvente,

$$R_2 - R_1 = -ik \frac{A e^{-\frac{iR_1}{k}} - B e^{\frac{iR_1}{k}}}{A e^{-\frac{iR_1}{k}} + B e^{\frac{iR_1}{k}}}.$$

Se si astrae dal caso in cui le costanti A e B sono tutte due eguali a zero, bisogna ammettere che nessuna di esse sia nulla, poichè nel caso contrario la differenza $R_2 - R_1$ sarebbe immaginaria. Poniamo dunque

$$\frac{B}{A} = M e^{2im}, \qquad m + \frac{R_1}{k} = \mu,$$

dove M ed m sono due costanti reali. Sostituendo si ottiene

ossia

$$R_2 - R_1 = ik\,\frac{Me^{2i\mu} - 1}{Me^{2i\mu} + 1},$$

ossia

$$R_2 - R_1 = \frac{ik(M^2 - 1) - 2kM \operatorname{sen} 2\mu}{M^2 + 2M\cos 2\mu + 1}.$$

Di qui risulta che affinchè la quantità $R_2 - R_1$ sia reale bisogna che si abbia $M^2 - 1 = 0$. Prendendo $M = -1$ si ha

$$R_2 - R_1 = \frac{k \operatorname{sen} 2\mu}{1 - \cos 2\mu} = k \operatorname{cotg} \mu,$$

ossia

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{cotg}\left(m + \frac{R_1}{k}\right),$$

od anche, surrogando alla costante m l'altra costante $\frac{\pi}{2} - m$,

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{tg}\left(m - \frac{R_1}{k}\right).$$

Tale è la relazione che ha luogo fra i raggi principali delle evolventi delle superficie di curvatura costante e positiva $\frac{1}{k^2}$, nel caso che consideriamo.

Indicando con $\frac{1}{r}$ la curvatura geodetica della linea $\rho_1 = \text{cost.}$ ossia $R_1 = \text{cost.}$ tracciata sulla superficie (Σ), abbiamo trovato, al principio dell'articolo precedente,

$$r = R_2 - R_1.$$

Confrontando questo valore coll'equazione precedente, si ha la formula

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{tg}\left(m + \frac{\rho_1}{k}\right)},$$

che somministra la curvatura geodetica dei paralleli della nostra superficie (Σ), ossia, in generale, di quelle fra le linee tracciate sopra una superficie di curvatura costante positiva $\frac{1}{k^2}$, le quali possono diventare, mercè la flessione di questa, paralleli di una superficie di rivoluzione[*)].

[*)] Queste linee si possono riguardare come *circonferenze geodetiche*, ossia come traiettorie ortogonali delle infinite linee geodetiche divergenti da un punto fisso. La curvatura geodetica di ciascuna di queste linee, sulle superficie di curvatura costante, è la stessa in ogni loro punto. Vedi MINDING, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. VI (1830), pag. 161.

Il valore della costante m dipende dalla curvatura geodetica della linea dalla quale si contano gli archi ρ_i, ovvero i raggi R_i, la quale è una linea cuspidale della superficie evolvente. Indicandone la curvatura con $\frac{1}{r_o}$ si ha

$$r_o = k \text{ tg } m.$$

Se la superficie (Σ) incontra l'asse di rivoluzione si può prendere $r_o = 0$, purchè si contino gli archi ρ_i dal punto in cui la superficie incontra l'asse. In questa ipotesi si ha $m = 0$, e quindi

$$R_1 - R_2 = k \text{ tg } \frac{R_1}{k}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{k \text{ tg } \frac{\rho_i}{k}}.$$

Quest'ultima formula coincide con quella che porge la curvatura geodetica di una curva sferica, quando si intenda per ρ_i il raggio sferico della curva nel punto considerato[*)]. È agevole concepire la ragione di questa coincidenza se si riflette che la nostra superficie (Σ) è applicabile sopra una sfera di raggio k.

Del resto è chiaro che mutando R_1 ed R_2 in $R_1 + \alpha$, $R_2 + \alpha$ si ottiene lo stesso risultato che variando convenientemente il valore di m, donde risulta che i differenti valori che si possono dare a questa costante corrispondono ad altrettante famiglie di superficie parallele tra loro. Basta adunque attribuire ad m un valore determinato, associando poi alle superficie ottenute in quest'ipotesi tutte le loro parallele. Nell'ipotesi testè ammessa si può scegliere il valore $m = 0$, al quale corrisponde la relazione semplice

$$R_1 - R_2 = k \text{ tg } \frac{R_1}{k}.$$

Passando ora al caso della curvatura costante negativa, si ha, dall'equazione in λ,

$$\lambda = Ae^{\frac{\rho_i}{k}} + Be^{-\frac{\rho_i}{k}},$$

da cui

$$\varphi = -\rho_i + k \frac{Ae^{\frac{\rho_i}{k}} - Be^{-\frac{\rho_i}{k}}}{Ae^{\frac{\rho_i}{k}} + Be^{-\frac{\rho_i}{k}}}.$$

[*)] Ciòè il raggio sferico del circolo osculatore in questo punto. Vedi Bertrand, *Traité de calcul différentiel*, § 545.

e quindi

$$R_2 - R_1 = k\,\frac{Ae^{-\frac{R_1}{k}} - Be^{\frac{R_1}{k}}}{Ae^{-\frac{R_1}{k}} + Be^{\frac{R_1}{k}}}.$$

In questo secondo caso l'integrale particolare che risulta dal supporre nulla una delle costanti non conduce, come nel precedente, ad un risultato immaginario. A questo integrale corrisponde la relazione semplicissima

$$R_2 - R_1 = \pm k,$$

dalla quale, conservando ad r il significato precedente, si trae

$$r = \pm k.$$

Quest'ultima formula c'insegna che fra le superficie di rivoluzione su cui sono applicabili le superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{k^2}$, ve ne sono alcune nelle quali tutti i paralleli hanno la medesima curvatura geodetica. Ora il raggio della curvatura geodetica di un parallelo non è altro, come già abbiamo osservato, che la porzione di tangente al meridiano in un punto del parallelo considerato, compresa fra questo punto di contatto e l'asse di rotazione. Dunque le anzidette superficie sono applicabili sopra una superficie di rivoluzione il cui meridiano è la linea dalle tangenti di lunghezza costante (uguale a k). Questo risultato è ben noto ai geometri[*)], ma le considerazioni precedenti ci conducono alle seguenti altre conseguenze:

Le evolute delle superficie le quali hanno in ogni punto costante ed uguale a k la differenza dei loro raggi di curvatura principali, sono superficie di curvatura costante negativa uguale a $-\frac{1}{k^2}$. *Le geodetiche inviluppate su queste evolute dalle normali delle evolventi possono trasformarsi, mediante un'opportuna flessione delle evolute stesse, nei meridiani di una superficie di rivoluzione, ed acquistano allora la proprietà di avere le tangenti (terminate all'asse) di lunghezza costante uguale a k.*

Questo teorema avrebbe anche potuto essere stabilito mediante considerazioni analoghe a quelle sviluppate nell'articolo precedente. Infatti da queste emerge chiaramente che le superficie ortogonali al sistema delle rette tangenti ai meridiani della superficie di rivoluzione generata dalla curva del sig. Liouville hanno la proprietà di

[*)] Veggasi Liouville, Nota IV all'*Application de l'analyse à la géométrie di Monge* (Paris, 1850), pag. 583, e un interessante lavoro del sig. Codazzi negli *Annali di Scienze Matematiche e fisiche* (di Tortolini), t. VIII (1857), pag. 346.

avere costante la differenza dei raggi di curvatura principali. Ora se si riguardano quelle rette come invariabilmente connesse all'anzidetta superficie, in ogni flessione di questa esse danno luogo (pel teorema dell'art. VI) ad una nuova serie di superficie ortogonali, nelle quali la proprietà suenunciata non cessa mai di verificarsi.

In tal modo siamo pervenuti ad assegnare la generazione di una classe completa di superficie, la quale finora non pare che sia stata l'oggetto di speciali ricerche, ed il cui carattere distintivo consiste nell'avere costante dovunque la differenza dei raggi principali di curvatura. Una particolarità di questa classe di superficie sta in ciò che la proprietà che le serve di definizione è comune a tutte le superficie parallele ad una qualunque di quelle che ne sono dotate, cosicchè la conoscenza di una fra esse conduce immediatamente a determinare un'intera famiglia. Limitandoci per ora ad aver toccato dei principii che possono servire di base a questa ricerca, riserviamo ad altra occasione il più adeguato sviluppo della medesima.

Quando nessuna delle due costanti A e B è nulla, si può porre

$$\frac{A}{B} = \pm e^{2m},$$

e si ottiene

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{tgh}\left(m - \frac{R_1}{k}\right),$$

oppure

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{ctgh}\left(m - \frac{R_1}{k}\right),$$

secondo che si prende il segno superiore o l'inferiore. (Le segnature tgh, ctgh rappresentano la tangente e la cotangente iperbolica). In corrispondenza a queste due formole si ha, per la curvatura geodetica dei paralleli,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{tgh}\left(m + \frac{\rho_i}{k}\right)},$$

oppure

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{ctgh}\left(m + \frac{\rho_i}{k}\right)}.$$

Anche in questo caso si può dare ad m un valore particolare ed associare alle superficie comprese nell'equazione risultante tutte quelle che sono ad esse parallele.

Le relazioni trovate fra R_1 ed R_2 nei varii casi che abbiamo discorsi, risolvono, entro i limiti già dichiarati, il secondo dei problemi che ci eravamo proposti.

XXI.

Abbiamo dati al principio dell'art. XVIII i valori delle quantità $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, curvatura geodetiche di due sistemi di curve ortogonali $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, assunte come coordinate curvilinee.

Il calcolo diretto del valore di $\frac{1}{r}$, curvatura geodetica di un sistema qualunque $\rho = \text{cost.}$ riferito a coordinate curvilinee arbitrarie u e v, non è molto semplice. Ma la considerazione dei secondi parametri differenziali conduce prontamente alla determinazione di questo valore. Rammentiamo infatti che dalle (48) si ha, mutando le h_1, h_2 in k_1, k_2 (giacchè riterremo in avvenire, come nell'art. XIV, $h_1 = \Delta_1 u,\ h_2 = \nabla uv,\ h_2 = \Delta_1 v$)),

$$\Delta_2 \rho_1 = k_1 k_2 \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{k_1}{k_2}\right),$$

ossia

$$\Delta_2 \rho_1 = k_1\left(k_1 k_2 \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{1}{k_2}\right) + \frac{\partial k_1}{\partial \rho_1}\right),$$

e quindi, per le (52),

$$\Delta_2 \rho_1 = k_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\partial k_1}{\partial \rho_1}\right).$$

Se ne ricava

(55') $$\begin{cases} \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{\Delta_2 \rho_1}{k_1} - \dfrac{\partial k_1}{\partial \rho_1}, \\ \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{\Delta_2 \rho_2}{k_2} - \dfrac{\partial k_2}{\partial \rho_2}, \end{cases}$$

la seconda essendo ottenuta con un analogo procedimento, e quindi, in virtù delle (45),

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\Delta_2 \rho_1}{k_1} - \frac{\nabla^2 \rho_1\, k_1}{k_2^2},$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\Delta_2 \rho_2}{k_2} - \frac{\nabla^2 \rho_2\, k_2}{k_1^2}.$$

In queste ultime formule le due funzioni ρ_1, ρ_2 compajono *separatamente* l'una dall'altra, insieme coi rispettivi parametri differenziali, il cui valore è, come sappiamo, indipendente dal sistema delle coordinate a cui si riferiscono. Applicando dunque ad un sistema qualsivoglia $\rho(u, v) = \text{cost.}$ ed alla rispettiva curvatura geodetica $\frac{1}{r}$ la rela-

zione espressa dall'una o dall'altra delle due formole precedenti, e ponendo $\Delta_2\rho = k$, si ottiene la formula generale

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_2\rho}{k} - \frac{\nabla\rho\, k}{k^2},$$

ossia

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_2\rho}{k} + \nabla\frac{\rho}{k}, \tag{56}$$

intendendo colla scrittura $\nabla\frac{\rho}{k}$ che l'operazione ∇ (art. XIV) dev'essere eseguita sulle due funzioni ρ ed $\frac{1}{k}$. Per abbreviare lo sviluppo di questa ultima formula poniamo

$$\begin{cases} h_1^2\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + h_{12}\dfrac{\partial\rho}{\partial v} = m, \\ h_{12}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + h_2^2\dfrac{\partial\rho}{\partial v} = n, \\ \sqrt{h_1^2h_2^2 - h_{12}^2} = H, \end{cases} \tag{57}$$

si ottiene così, per le (36), (49),

$$\frac{1}{r} = \frac{H}{k}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{m}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{n}{H}\right) + m\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{k} + n\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{k},$$

o più semplicemente

$$\frac{1}{r} = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{Hk}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n}{Hk}\right)\right]. \tag{58}$$

Tale è l'espressione generale di $\frac{1}{r}$, ridotta alla sua forma più semplice e più comoda nelle applicazioni. Nondimeno, per poter verificare l'identità della medesima con altre formule note, ci conviene assoggettarla ad una ulteriore trasformazione.

In primo luogo introduciamo in luogo delle h_1^2, h_{12}, h_2^2 le E, F, G, ed osserviamo che in virtù delle (37), (40), si ha

$$\frac{m}{H} = \frac{M}{T}, \qquad \frac{n}{H} = \frac{N}{T},$$

e che, ponendo per brevità

$$P = \sqrt{E\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2} = \sqrt{M\frac{\partial\rho}{\partial u} + N\frac{\partial\rho}{\partial v}},$$

si ha pure

$$Tk = P.$$

per cui la (XXI.) può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{P}\right). \quad (58')$$ *)

Indicando per semplicità cogli indici 1, 2 le derivazioni parziali relative ad u ed a v, si ottiene dapprima

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{PT}\left(M_1 + N_2 - \frac{MP_1 + NP_2}{P}\right),$$

da cui, surrogando per P_1 e P_2 i valori

$$P_1 = \frac{1}{2P}\left(M\rho_{11} + N\rho_{12} + M_1\rho_1 + N_1\rho_2\right),$$

$$P_2 = \frac{1}{2P}\left(M\rho_{12} + N\rho_{22} + M_2\rho_1 + N_2\rho_2\right),$$

si passa all'espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2P^3T}\Big\{2P^2(M_1 + N_2) - \big[M^2\rho_{11} + 2MN\rho_{12} + N^2\rho_{22}$$

$$+(MM_1 + NM_2)\rho_1 + (MN_1 + NN_2)\rho_2\big]\Big\}.$$

Sostituendo i valori di M_1, N_1, M_2, N_2 e facendo qualche riduzione nei coefficienti delle derivate seconde di ρ, si trova poscia:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{P^3T}\Big\{(P^2G - M^2)\rho_{11} - 2(P^2F + MN)\rho_{12} + (P^2E - N^2)\rho_{22}$$

$$+(M\rho_1 + N\rho_2)\big[(G_1 - F_2)\rho_1 + (E_2 - F_1)\rho_2\big]$$

$$-\frac{1}{2}\rho_1\big[M(G_1\rho_1 - F_1\rho_2) + N(G_2\rho_1 - F_2\rho_2)\big]$$

$$-\frac{1}{2}\rho_2\big[M(E_1\rho_2 - F_1\rho_1) + N(E_2\rho_2 - F_2\rho_1)\big]\Big\}.$$

Da ultimo, calcolando i valori delle quantità $GP^2 - M^2$, $FP^2 + MN$, $EP^2 - N^2$ e raccogliendo i fattori M ed N, che si trovano in tutti i termini non contenenti de-

*) Questa formula è già stata data dal sig. Bonnet, nell'art. IX del *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2$^{\text{me}}$ série, t. V (1860), pag. 153).

derivate seconde, si ottiene il seguente valore finale:

$$(59)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{(E\rho_2^2 - 2F\rho_1\rho_2 + G\rho_1^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{EG-F^2}}\Big\{(EG-F^2)(\rho_1^2\rho_{22} - 2\rho_1\rho_2\rho_{12} + \rho_2^2\rho_{11}) \\ \qquad + (G\rho_1 - F\rho_2)\big[(\frac{1}{2}G_1 - F_2)\rho_1^2 + E_2\rho_1\rho_2 - \frac{1}{2}E_1\rho_2^2\big] \\ \qquad + (E\rho_2 - F\rho_1)\big[(\frac{1}{2}E_2 - F_1)\rho_2^2 + G_1\rho_1\rho_2 - \frac{1}{2}G_2\rho_1^2\big]\Big\}. \end{cases}$$

In particolare per le linee $u = \text{cost.},\ v = \text{cost.}$ si ha

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_u} = \dfrac{1}{2T\sqrt{G}}\left(\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2\dfrac{\partial F}{\partial v} + \dfrac{F}{G}\dfrac{\partial G}{\partial v}\right), \\ \dfrac{1}{r_v} = \dfrac{1}{2T\sqrt{E}}\left(\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{F}{E}\dfrac{\partial E}{\partial u}\right), \end{cases}$$

formole in cui riterremo positivi i valori di $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$, per restare in accordo colla convenzione fatta nell'art. XVIII rispetto al segno delle curvature geodetiche.

Dall'espressione generale (XXI.) si passa subito a quella in cui invece delle derivate parziali di ρ entrano i differenziali primi e secondi di u, v relativi ad uno spostamento infinitesimo lungo una delle linee del sistema che si considera. Infatti si ha

$$\rho_2 = -\rho_1\frac{du}{dv}, \qquad \rho_{11}du^2 + 2\rho_{12}dudv + \rho_{22}dv^2 = \rho_1\frac{du\,d^2v - dv\,d^2u}{dv},$$

da cui

$$E\rho_2^2 - 2F\rho_1\rho_2 + G\rho_1^2 = \rho_1^2\frac{ds^2}{dv^2},$$

$$\rho_1^2\rho_{22} - 2\rho_1\rho_2\rho_{12} + \rho_2^2\rho_{11} = \rho_1^3\frac{du\,d^2v - dv\,d^2u}{dv^3},$$

e quindi

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{EG-F^2}}\Big\{(EG-F^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u) \\ \qquad + (Edu + Fdv)\big[(F_1 - \frac{1}{2}E_2)du^2 + G_1dudv + \frac{1}{2}G_2dv^2\big] \\ \qquad - (Fdu + Gdv)\big[(F_2 - \frac{1}{2}G_1)dv^2 + E_2dudv + \frac{1}{2}E_1du^2\big]\Big\}. \end{cases}$$ *)

*) È bene notare che ponendo successivamente $du = 0,\ dv = 0$, si ottengono da questa formula valori di $\frac{1}{r_u}, \frac{1}{r_v}$ i cui segni non pajono accordarsi con quelle delle (XXI.). Ma è facile vedere che in realtà questi segni restano indeterminati per la presenza del radicale ds^2. Noi ci atterremo ai valori (XXI.) per la ragione già adottata.

Questa espressione coincide (dopo lo sviluppo delle moltiplicazioni accennate fra le parentesi) con quella che venne data dal sig. Minding[*].

Noi sappiamo (art. XVIII) che per le linee geodetiche la curvatura geodetica è eguale a zero. Dalla precedente equazione si può quindi ricavare l'equazione differenziale delle linee geodetiche sotto la sua forma più generale: basta fare $\frac{1}{r} = 0$. Noi non istaremo a trascrivere quest'equazione, che raramente può riuscire più comoda di quella data da Gauss (*Disquisitiones generales*, etc., art. XVIII).

Partendo dall'espressione (61) è facile risalire al significato geometrico della quantità $\frac{1}{r}$. Infatti, siccome le coordinate curvilinee u, v sono interamente arbitrarie, così noi possiamo, dopo aver riferita la superficie a tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, supporre $u = x,\ v = y$. In tale ipotesi, ponendo al solito,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

si ha

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2,$$

da cui

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$Edu + Fdv = dx + p\,dz, \qquad Fdu + Gdv = dy + q\,dz,$$

$$(F_1 - \tfrac{1}{2}E_2)du^2 + G_1\,du\,dv + \tfrac{1}{2}G_2\,dv^2 = q\,(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2),$$

$$(F_2 - \tfrac{1}{2}G_1)dv^2 + E_2\,du\,dv + \tfrac{1}{2}E_1\,du^2 = p\,(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2).$$

Osservando dunque che

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y,$$

si ha, dalla sostituzione,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{ds^3\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\Big\{(1 + p^2 + q^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + (q\,dx - p\,dy)(d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y)\Big\},$$

ovvero, per una facile trasformazione,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{ds^3\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\Big[-p(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - q(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + dx\,d^2y - dy\,d^2x\Big].$$

[*] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. VI (1830), pag. 160. Nell'ultimo termine della formula del sig. Minding bisogna scrivere $\frac{\partial E}{\partial q}\,dp$ in luogo di $\frac{\partial E}{\partial q}\,dq$.

Ora chiamando a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie fa coi tre assi, α, β, γ quelli degli angoli fatti coi medesimi assi dalla normale al piano osculatore della curva tracciata sovr'essa, con R il raggio di curvatura della curva stessa, si ha, come è notissimo,

$$a = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad b = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\alpha = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3}R, \qquad \beta = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3}R, \qquad \gamma = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}R,$$

dunque

$$\frac{1}{r} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{R},$$

ossia

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{R},$$

indicando con θ l'angolo che il piano osculatore della curva fa col piano tangente la superficie. È questa la notissima formula che porge la curvatura geodetica di una curva tracciata sopra una superficie. La natura dell'espressione da cui venne dedotta pone fuori di dubbio la proprietà che ha questo ente, di rimanere invariabile in tutti i cambiamenti di forma di cui è suscettibile la superficie data, riguardata come flessibile ed inestensibile[*].

XXII.

Applichiamo le formole generali trovate nell'articolo precedente ad alcune questioni particolari.

Supponiamo primieramente che le coordinate sieno geodetiche, e quindi che si abbia

$$h_1 = 1, \qquad h_{12} = 0;$$

in queste ipotesi si ha dalle (60)

$$\frac{1}{r_u} = h_2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_2}\right) = -\frac{\partial \log h_2}{\partial u}, \qquad \frac{1}{r_v} = 0,$$

valori che coincidono con quelli che abbiamo già trovati nell'art. XVIII.

Supponiamo che la curvatura geodetica delle linee $u =$ cost., le quali costituiscono

[*] L'invariabilità della curvatura geodetica fu stabilita per la prima volta dal sig. Minding, nella nota citata pocanzi.

sulla superficie un sistema di curve parallele, debba essere costante lungo ciascuna di esse. Affinchè ciò si verifichi, bisogna che r_u risulti funzione della sola u, ed in questo caso dall'espressione di r_u si deduce

$$\frac{1}{h_2} = Ve^{\int \frac{du}{r_u}},$$

in cui V è una funzione della sola v. Se dunque si pone

$$V\,dv = dv_1,$$

il quadrato dell'elemento lineare assume la forma

$$du^2 + e^{2\int \frac{du}{r_u}} dv_1^2.$$

Ora questa forma conviene all'elemento lineare di una superficie di rivoluzione, in cui u è l'arco del meridiano, contato da un parallelo fisso; dunque: *quando sopra una superficie esiste un sistema di curve parallele, tali che ciascuna di esse abbia la curvatura geodetica costante, la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione, i cui paralleli sono le curve trasformate delle anzidette.*

Per esempio, nelle superficie elicoidali le eliche descritte dai varii punti della curva generatrice sono evidentemente curve parallele; d'altronde, per la simmetria del sistema, è altrettanto evidente che la curvatura di ciascuna elica è costante in ogni suo punto. Dunque: *ogni superficie elicoidale è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione*[*)].

Le conseguenze dell'ipotesi che abbiamo testé ammessa si possono enunciare anche in altro modo. Se il sistema $\rho_1 = \text{cost.}$ è formato di curve parallele, k_1 ossia $\Delta_1\rho_1$ è (art. IV) una funzione della sola ρ_1, e dalla prima delle (XXI.) si deduce

$$\frac{\Delta_2\rho_1}{(\Delta_1\rho_1)^2} = \frac{1}{k_1 r_1} + \frac{d\log k_1}{d\rho_1}.$$

Dunque, se la curvatura geodetica $\frac{1}{r_1}$ è costante lungo ciascuna delle curve parallele $\rho_1 = \text{cost.}$, la quantità

$$\frac{\Delta_2\rho_1}{(\Delta_1\rho_1)^2}$$

è funzione soltanto di ρ_1 e reciprocamente, epperò (art. XVI) le curve $\rho_1 = \text{cost.}$ sono

[*)] Bour, *Théorie de la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXII, cahier 39 (1862), pag. 82); Bertrand, *Traité de calcul différentiel*, § 738.

isoterme. Dunque: *se sopra una superficie esiste un sistema di curve parallele, ciascuna delle quali abbia la curvatura geodetica costante, queste curve sono anche isoterme e la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione. Si può anche dire che: quando sopra una superficie esiste un sistema di curve isoterme, le quali sono in pari tempo curve parallele, la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione i cui paralleli sono le curve trasformate delle anzidette.* Ovvero finalmente, rammentando (art. XVI) che se di due sistemi ortogonali l'uno è isotermo, è tale anche l'altro: *quando sopra una superficie esiste un sistema di linee geodetiche, che sieno in pari tempo linee isoterme, la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione, i cui meridiani sono le curve trasformate delle geodetiche anzidette.*

Applicheremo la proprietà ora considerata, sotto il suo penultimo enunciato, alla determinazione della forma che deve avere la funzione h di u e di v, affinchè l'espressione

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2} \tag{61}$$

convenga all'elemento di una superficie di rivoluzione. Per tal uopo osserviamo che se $\rho = \text{cost.}$ è un sistema di curve parallele, si ha (art. IV)

$$\Delta_1 \rho = F(\rho).$$

Dovendo questo sistema essere anche isotermo possiamo supporre (art. XVII) che ρ abbia la forma

$$\rho = \frac{\varphi(u + iv) + \psi(u - iv)}{2},$$

dove φ e ψ sono funzioni conjugate. Se ne deduce

$$\Delta_1 \rho = h\sqrt{\varphi'\psi'},$$

e quindi

$$h\sqrt{\varphi'\psi'} = F\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right).$$

Se la funzione h fosse data, quest'ultima equazione esprimerebbe una condizione imposta alle funzioni φ, ψ, la quale dovrebbe aggiungersi a quelle che derivano dalla natura stessa di queste funzioni. Ma poichè noi cerchiamo la forma che deve avere la funzione h, affinchè queste condizioni possano essere simultaneamente soddisfatte, è chiaro che basterà porre

$$h = \frac{F\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)}{\sqrt{\varphi'\psi'}}. \tag{62}$$

e riguardare come arbitraria la forma delle funzioni φ ed F. Si ottiene così, in virtù del teorema suaccennato, la richiesta forma generale della funzione h.

Se ne deduce agevolmente la curvatura geodetica delle linee ρ, considerate pocanzi. Infatti si ha dapprima

$$\Delta_1\rho = h\sqrt{\varphi'\psi'} = F(\rho),$$

e quindi, osservando che $\Delta_2\rho = 0$, ed applicando la (XXI.),

$$\frac{1}{r} = \nabla\frac{\rho}{F} = (\Delta_1\rho)^2\frac{d}{d\rho}\frac{1}{F},$$

ossia

$$\frac{1}{r} = -\frac{dF}{d\rho}. \tag{63}$$

Quest'equazione serve a determinare la forma della funzione F quando si conosce il modo in cui r dipende dal parametro termometrico ρ.

XXIII.

Le espressioni del secondo parametro differenziale e della curvatura geodetica di un sistema qualunque di curve sono suscettibili di alcune trasformazioni utili a conoscersi, le quali passiamo ad esporre.

Per tal uopo consideriamo due sistemi ortogonali ρ_1 e ρ_2, e rappresentiamo con $m_1,\ n_1,\ m_2,\ n_2$ quantità analoghe alle $m,\ n$ (XXI.) e relative a questi due sistemi. Si ha dalla (49)

$$\Delta_2\rho_2 = H\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{m_2}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{n_2}{H}\right),$$

e le due equazioni che susseguono alle (45), osservate le (37), (40), diventano

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial u} = -\frac{n_1k_2}{Hk_1}, \qquad \frac{\partial\rho_2}{\partial v} = \frac{m_1k_2}{Hk_1}.$$

Introducendo nelle $m_2,\ n_2$ questi valori di $\frac{\partial\rho_2}{\partial u},\ \frac{\partial\rho_2}{\partial v}$, si trova

$$\frac{m_2}{H} = -\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}, \qquad \frac{n_2}{H} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}.$$

e quindi, sostituendo nella precedente espressione di $\Delta_2\rho_2$,

$$\Delta_2\rho_2 = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)\right]. \tag{64}$$

ovvero

$$\Delta_2\rho_2 = H\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{k_2}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{k_2}{k_1}}{\partial u}\right). \tag{64'}$$

Questa nuova espressione del secondo parametro differenziale è notevole massimamente per ciò che la funzione ρ_2, a cui esso si riferisce, non vi entra che col proprio parametro di prim'ordine k_2.

Rammentiamo ora la formula (XXI.):

$$\frac{1}{r_2} = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m_2}{Hk_2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n_2}{Hk_2}\right)\right].$$

Dalle relazioni precedenti si trae

$$\frac{m_2}{Hk_2} = -\frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}, \qquad \frac{n_2}{Hk_2} = \frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u},$$

e quindi

$$\frac{1}{r_2} = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)\right], \tag{65}$$

ossia

$$\frac{1}{r_2} = H\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial u}\right). \tag{65'}$$

Questa nuova formula somministra il valore della curvatura geodetica di un sistema di curve per mezzo di soli elementi relativi al sistema ortogonale.

Che una simile formula dovesse esistere, lo si poteva dedurre immediatamente dalla riflessione che un sistema di curve è perfettamente definito quando è dato il suo sistema ortogonale. Ma si poteva anche prevedere che questa espressione doveva contenere il fattore

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial u}.$$

Infatti la curvatura geodetica di un sistema di curve $\rho_2 =$ cost. deve ridursi identicamente a zero quando il sistema ortogonale $\rho_1 =$ cost. è formato di curve parallele fra loro geodeticamente. Ora la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò abbia

luogo è (art. IV)

$$\frac{1}{k_1} = F(\rho_1),$$

dove F è una funzione indeterminata. Eliminando questa funzione si ha, quale condizione di parallelismo (equivalente a quella che precede),

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial u} = 0. \tag{66}$$

Poichè dunque il primo membro di quest'equazione si annulla identicamente insieme con $\frac{1}{r_2}$, bisogna che esso entri come fattore nell'espressione generale di quest'ultima quantità.

È bene far notare il significato che assume la precedente equazione (XXIII.), quando, riguardandosi la funzione ρ_1 come data arbitrariamente, essa non è soddisfatta che da una certa serie di valori delle $u,\ v$. In tal caso essa rappresenta una curva che ha con quelle del sistema $\rho_1 = \text{cost.}$ una connessione intima: essa è la *linea di stringimento* di questo sistema *. Infatti chiamando δ la distanza normale di due curve consecutive del sistema $\rho_1 = \text{cost.}$ nel punto (u, v), si ha (art. IV)

$$\delta\sigma = \frac{1}{k_1}\,\delta\rho_1.$$

La linea di stringimento è il luogo dei punti in cui $\delta\sigma$ è minimo. Dunque, riguardando $\delta\rho_1$ come costante, si deve avere lungo di essa

$$d\left(\frac{1}{k_1}\right) = \frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial u}\,du + \frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial v}\,dv = 0.$$

Ma le $du,\ dv$ sono legate dalla relazione

$$d\rho_1 = \frac{\partial\rho_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\,dv = 0;$$

dunque l'equazione della linea di stringimento si ottiene eliminando $du : dv$ fra queste ultime equazioni, nel qual modo si ricade appunto sulla (XXIII.).

Ravvicinando quest'equazione alla formula (XXIII.) si conclude immediatamente il

seguente teorema: *la linea di stringimento di un sistema di curve tracciate sopra una superficie è il luogo dei punti in cui le curve componenti il sistema ortogonale al dato hanno la curvatura geodetica eguale a zero.*

Questa proprietà, della quale è facile rendersi ragione per via geometrica, è già stata notata rispetto alla linea di stringimento di un sistema di rette[*]). Giova osservare che se una curva tracciata sopra una superficie viene proiettata sul piano che tocca questa superficie in uno dei punti in cui la curvatura geodetica della curva stessa è nulla, si ottiene una curva piana che ha un flesso nel punto di contatto.

Quando il sistema dato è formato di curve parallele, il teorema precedente non può più servire alla determinazione della linea di stringimento. Ma in questo caso è evidente che ciascuna traiettoria ortogonale possiede la proprietà caratteristica di siffatta linea.

Cerchiamo ora l'espressione della curvatura geodetica di un sistema di curve definite da un'equazione differenziale della forma

$$U\,du + V\,dv = 0. \tag{67}$$

Chiamando $\varkappa$ uno dei fattori che rendono integrabile il primo membro di questa equazione, possiamo prendere

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \varkappa U, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \varkappa V,$$

e quindi, ponendo per brevità,

$$Q = \sqrt{h_1^2 U^2 + 2h_{12}UV + h_2^2 V^2},$$
$$h_1^2 U + h_{12} V = U', \qquad h_{12} U + h_2^2 V = V',$$

si ha

$$k_1 = \varkappa Q,$$

da cui

$$\frac{1}{k_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{U}{Q}, \qquad \frac{1}{k_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \frac{V}{Q},$$
$$\frac{m_1}{k_1} = \frac{U'}{Q}, \qquad \frac{n_1}{k_1} = \frac{V'}{Q}.$$

Sostituendo questi ultimi valori nella formula (XXI.) si trova

[*]) BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* [Journal de l'École Polytechnique, t. XIX, cahier 32 (1848), pag. 70].

$$\frac{1}{r_1} = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U'}{HQ}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V'}{HQ}\right)\right], \tag{68}$$

espressione in cui non entrano più che le U, V.

La curvatura del sistema ortogonale $\rho_2 =$ cost. si ottiene immediatamente osservando che la formula (XXIII.) equivale a quest'altra

$$\frac{1}{r_2} = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{Q}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{Q}\right)\right], \tag{69}$$

in cui parimenti non entrano più che le U, V.

Da quest'equazione, in virtù del precedente teorema, si deduce, per la linea di stringimento del sistema (XXIII.),

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{Q}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{Q}\right) = 0.$$

Per ultimo cerchiamo la condizione che deve verificarsi affinchè il sistema (XXIII.) sia isotermo. Essendo, nelle ipotesi precedenti,

$$m_1 = \varkappa U', \qquad n_1 = \varkappa V',$$

l'espressione del secondo parametro differenziale è

$$\Delta_2\rho_1 = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varkappa U'}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varkappa V'}{H}\right)\right].$$

Ora affinchè il sistema (XXIII.) sia isotermo è evidentemente necessario e sufficiente che si possa assegnare al fattore $\varkappa$ un valor tale, che ne risulti $\Delta_2\rho_1 = 0$, e quindi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varkappa U'}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varkappa V'}{H}\right) = 0,$$

equazione dalla quale bisogna eliminare $\varkappa$ mediante l'equazione

$$\frac{\partial(\varkappa U)}{\partial v} - \frac{\partial(\varkappa V)}{\partial u} = 0,$$

alla quale deve soddisfare ogni valore di $\varkappa$. Scrivendo queste due equazioni nel modo seguente:

$$V\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u} - U\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$U\frac{\partial \log\varkappa}{\partial u} + V\frac{\partial \log\varkappa}{\partial v} = -H\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{U'}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{V'}{H}\right),$$

se ne possono ricavare immediatamente i valori di $\frac{\partial \log x}{\partial u}$, $\frac{\partial \log x}{\partial v}$. In tal modo, ponendo per brevità

$$\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} = Z, \qquad H\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{U'}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{V'}{H}\right) = W,$$

ed osservando che $UU' + VV' = Q^2$, si trova

$$\frac{\partial \log x}{\partial u} = \frac{ZV' - WU}{Q^2}, \qquad -\frac{\partial \log x}{\partial v} = \frac{ZU' + WV}{Q^2}.$$

Eliminando x si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{ZU + WV}{Q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ZV' - WU}{Q^2}\right) = 0. \tag{70}$$

Tale è la condizione cercata.

Nel caso delle coordinate isotermi, le due equazioni che hanno servito a stabilirla ricadono nelle notissime che esprimono essere il binomio $x(U + iV)$ una funzione di $u - iv$. Infatti supponendo che si abbia

$$x(U + iV) = 2\psi(u - iv),$$

e quindi

$$x(U - iV) = 2\varphi(u + iv),$$

(dove φ e ψ sono al solito funzioni coniugate) se ne deduce

$$x(U\,du + V\,dv) = (\psi + \varphi)\,du + \frac{\psi - \varphi}{i}\,dv = \varphi(du + i\,dv) + \psi(du - i\,dv),$$

epperò l'integrale dell'equazione proposta può riguardarsi come rappresentato dall'equazione

$$\int \varphi(u + iv)\,(du + i\,dv) + \int \psi(u - iv)\,(du - i\,dv) = \text{cost.},$$

la quale conviene appunto ad un sistema isotermo.

XXIV.

Passando ora a trattare delle funzioni *assolute* (art. XIII), osserveremo primieramente che una funzione di tal natura è subito trovata quando l'elemento lineare della superficie è posto sotto la forma (51). Infatti se (u, v), (u', v') sono due sistemi di

coordinate curvilinee isotermi relative ad una medesima superficie, talchè si abbia

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2} = \frac{du'^2 + dv'^2}{h'^2},$$

devono sussistere (art. XVII) fra queste due coppie di variabili due relazioni della forma

$$u' + iv' = \varphi(u + iv), \qquad u' - iv' = \psi(u - iv),$$

φ e ψ essendo due funzioni coniugate. Se ne deduce

$$du'^2 + dv'^2 = \varphi'\psi'(du^2 + dv^2)$$

e quindi

$$h' = h\sqrt{\varphi'\psi'},$$

da cui

$$\log h' = \log h + \frac{1}{2}\log\varphi' + \frac{1}{2}\log\psi'. \tag{71}$$

Ora le funzioni $\log\varphi'$, $\log\psi'$ soddisfanno all'equazione differenziale parziale $\Delta_2 f = 0$, dunque la relazione precedente dà luogo a quest'altra

$$\Delta_2 \log h' = \Delta_2 \log h. \tag{72}$$

Il primo membro di quest'equazione può riguardarsi come formato colle variabili u', v', il secondo colle u, v. Se dunque si osserva che in questa formula non resta più traccia delle relazioni fra i due sistemi di variabili, e che non vi figura alcuna funzione diversa da quella che caratterizza l'elemento lineare, si può senz'altro concludere (art. XIII) che:

la funzione $\Delta_2 \log h$ *è una funzione assoluta.*

Partendo da questo risultato e fondandosi sull'*invariabilità* del parametro Δ_2 (art. XV) è facile trovare l'espressione generale di questa funzione assoluta, che rappresenteremo con Θ. Si vedrà in tal modo ch'essa coincide colla nota formula di Gauss, e si otterrà così una dimostrazione analitica diretta e semplicissima di questa formula memorabile.

Continuando a designare con T la quantità $\sqrt{EG - F^2}$ e ponendo inoltre, per brevità,

$$\sqrt{E} = U, \qquad \frac{F + iT}{\sqrt{E}} = V, \qquad \frac{F - iT}{\sqrt{E}} = V',$$

si ha identicamente

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = (U\,du + V\,dv)(U\,du + V'\,dv).$$

Chiamiamo $\varkappa$, $\varkappa'$ i due fattori integranti (immaginarii coniugati) che rendono

$$\varkappa(U\,du + V\,dv) = du' + i\,dv', \qquad \varkappa'(U\,du + V'\,dv) = du' - i\,dv',$$

e quindi

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \frac{du'^2 + dv'^2}{x\,x'}.$$

Dalle cose premesse risulta che

$$\Theta = \Delta_2 \log \sqrt{x\,x'},$$

e siccome x e x' sono quantità coniugate, così è chiaro che per avere il valore di Θ basta calcolare la parte reale di $\Delta_2 \log x$, cioè (eq. (47)) dell'espressione

$$\Delta_2 \log x = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial \log x}{\partial u} - F\frac{\partial \log x}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial \log x}{\partial v} - F\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)\right].$$

Ora il fattore d'integrazione x deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial(xU)}{\partial v} = \frac{\partial(xV)}{\partial u},$$

ossia alla seguente

$$U\frac{\partial \log x}{\partial v} - V\frac{\partial \log x}{\partial u} + U_2 - V_1 = 0,$$

dove gli indici 1, 2 indicano, al solito, derivazioni parziali relative ad u ed a v. Rammentando i valori di U, V ed osservando che

$$V = \frac{F + iT}{U} = \frac{GU}{F - iT},$$

si vede facilmente che la precedente equazione può scriversi nei modi seguenti:

$$\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial \log x}{\partial v} - F\frac{\partial \log x}{\partial u}\right) = i\frac{\partial \log x}{\partial u} - \frac{U(U_2 - V_1)}{T},$$

$$\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial \log x}{\partial u} - F\frac{\partial \log x}{\partial v}\right) = -i\frac{\partial \log x}{\partial v} + \frac{(F - iT)(U_2 - V_1)}{TU}.$$

Coll'aiuto di queste due relazioni si elimina immediatamente la funzione incognita x dall'espressione di $\Delta_2 \log x$, e si ottiene

$$\Delta_2 \log x = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(F - iT)(U_2 - V_1)}{TU}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U(U_2 - V_1)}{T}\right)\right].$$

Ora essendo

$$U_2 - V_1 = \frac{EE_2 + E_1F - 2EF_1}{2E\sqrt{E}} - i\frac{E_1F + E^2G_1 - 2EFE_1}{2TE\sqrt{E}},$$

la parte reale di $(F - iT)(U_2 - V_1)$ risulta eguale a

$$\frac{E_2F - EG_1}{2\sqrt{E}};$$

si ha dunque finalmente

$$\Theta = -\frac{1}{2T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]. \tag{73}$$

È facile assegnare il significato geometrico di quest'espressione. Supponiamo che la superficie sia riferita (come nell'art. XXI) a tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, e poniamo

$$u = x, \qquad v = y, \qquad E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2 :$$

in tale ipotesi si ha

$$T = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

e l'espressione precedente si trasforma in quest'altra

$$\Theta = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{qr}{T(1+p^2)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{qs}{T(1+p^2)}\right].$$

Eseguendo le derivazioni e riducendo si trova

$$\Theta = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Ora il secondo membro di quest'equazione esprime, com'è notissimo, il prodotto reciproco dei raggi principali di curvatura della superficie. L'analisi precedente stabilisce dunque che questo prodotto rimane invariabile in ogni flessione della superficie medesima. In ciò consiste il celebre teorema dato per la prima volta da GAUSS, nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. XIII.

La funzione assoluta che esprime (eq. (XXIV.)) il valore di questo prodotto si converte nella formula di GAUSS (l. c. art. XI) quando si eseguiscono tutte le derivazioni indicate, per cui sebbene priva di simmetria, essa ha sopra quella di GAUSS il vantaggio della concisione. Essa è stata data per la prima volta, senza dimostrazione, dal sig. LIOUVILLE, in una *Nota* letta all'Accademia Francese nel 1851[*)]; venne poscia dimostrata dal sig. CHELINI[**)], con un processo al tutto diverso dal precedente.

Lo stesso sig. LIOUVILLE ha indicato (l. c.) un'altra forma assai elegante e simme-

[*)] Inserita nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI (1851), pag. 130.

[**)] *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* (di TORTOLINI), t. II (1851), pag. 291.

trica dell'espressione di Θ, che è stata parimenti dimostrata dal sig. CHELINI. Essa si ottiene prontamente nel modo che segue. Dalle (XXI.) si deduce

$$\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right) = \frac{\sqrt{E}}{r_v},$$

$$\frac{1}{2T}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\sqrt{G}}{r_u} + \frac{F}{T}\left(\frac{\partial \log F}{\partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial v}\right).$$

Quindi la (XXIV.) diventa

$$\Theta = -\frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{T}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)\right].$$

Ora chiamando ω l'angolo delle due curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, si ha, come è noto,

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{T}{F},$$

quindi l'equazione precedente può scriversi

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_v}\right)\right]. \tag{74}$$

Tale è la seconda forma indicata dal sig. LIOUVILLE.

XXV.

La formula di GAUSS si può ottenere anche con un semplice processo di eliminazione che noi esporremo per il caso di un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Supponendo che le coordinate u, v sieno isotermi, le relazioni (39) diventano

$$k_1^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)^2\right], \qquad k_2^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\right)^2\right],$$

$$0 = \frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial u} + \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}.$$

Introducendo una variabile ausiliaria ω, si possono sostituire a queste tre equazioni le quattro seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} = \dfrac{k_1\cos\omega}{h}, & \dfrac{\partial\rho_1}{\partial v} = \dfrac{k_1\operatorname{sen}\omega}{h}, \\ \dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} = -\dfrac{k_2\operatorname{sen}\omega}{h}, & \dfrac{\partial\rho_2}{\partial v} = \dfrac{k_2\cos\omega}{h}. \end{cases} \tag{75}$$

Confrontando queste formule colle (40), (44), ovvero colle (43), si trova

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_1} = \frac{h\cos\omega}{k_1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho_1} = \frac{h\,\mathrm{sen}\,\omega}{k_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \rho_2} = -\frac{h\,\mathrm{sen}\,\omega}{k_2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = \frac{h\cos\omega}{k_2},$$

donde risulta che le derivate relative alle $u,\ v$ sono legate a quelle relative alle $\rho_1,\ \rho_2$ dalle relazioni

$$\text{(76)} \qquad \begin{cases} \cos\omega\,\dfrac{\partial}{\partial u} + \mathrm{sen}\,\omega\,\dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{k_1}{h}\,\dfrac{\partial}{\partial \rho_1}, \\ -\mathrm{sen}\,\omega\,\dfrac{\partial}{\partial u} + \cos\omega\,\dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{k_2}{h}\,\dfrac{\partial}{\partial \rho_2}, \end{cases}$$

coll'aiuto delle quali si possono facilmente eliminare dalle (XXV.) le derivate di $\rho_1,\ \rho_2$ rapporto ad $u,\ v$ e la variabile ausiliaria ω.

Infatti eliminando dapprima le $\rho_1,\ \rho_2$ si ottengono le seguenti equazioni:

$$\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u} + \mathrm{sen}\,\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v} = \quad \cos\omega\,\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{k_1}{h} - \mathrm{sen}\,\omega\,\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{k_1}{h},$$
$$-\mathrm{sen}\,\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u} + \cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v} = -\left(\mathrm{sen}\,\omega\,\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{k_2}{h} + \cos\omega\,\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{k_2}{h}\right),$$

ovvero, in virtù delle (XXV.),

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\log\frac{k_1}{h}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2} = -\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\log\frac{k_2}{h};$$

quindi, eliminando ω,

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\log\frac{k_2}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\log\frac{k_1}{h}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\log h\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\log h\right),$$

ossia (art. XVI)

$$\Delta_2 \log h = k_1 k_2\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\log k_2\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\log k_1\right)\right].$$

La forma di questa equazione ci avverte (art. XIII) che ambedue i suoi membri

sono espressioni equivalenti di una stessa funzione assoluta, la quale non è altro che la Θ dell'articolo precedente. Dunque

$$\Theta = k_1 k_2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \frac{\partial \log k_2}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \log k_1}{\partial \rho_2} \right) \right],$$

ovvero

$$\Theta = -k_1 k_2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{1}{k_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{1}{k_1} \right) \right], \tag{77}$$

od anche, per le (52'),

$$\Theta = -k_1 k_2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{1}{k_1 r_1} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{1}{k_2 r_2} \right).$$

Quest'ultima coincide con quella che si deduce dalla (XXIV.) ponendo $F = 0$.

Essa può scriversi, per le citate formule (52'), nel modo seguente:

$$k_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{1}{r_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = -\Theta;$$

ora, indicando colle caratteristiche δ_1, δ_2 le variazioni che nascono da spostamenti effettuati lungo le linee $\rho_2 = \text{cost.}$, $\rho_1 = \text{cost.}$, si ha (art. XV)

$$k_1 = \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta_1 s_1}, \qquad k_2 = \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta_2 s_2},$$

dunque

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 s_1} \frac{1}{r_1} + \frac{\delta_2}{\delta_2 s_2} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = -\frac{1}{R_1 R_2}. \tag{78}$$

Questa importante generalizzazione di una nota formula del sig. LAMÉ è dovuta al sig. OSSIAN BONNET[*].

APPENDICE ALL'ART. XII.

Prima di abbandonare la teoria dei sistemi di rette distribuite nello spazio (qui trattata dentro i limiti convenienti all'oggetto delle presenti ricerche) non crediamo inutile di mostrare come dalla formula (9) si deduca la notissima proprietà caratteri-

[*] Journal de l'École Polytechnique, t. XIX, cahier 32 (1848), pag. 53.

stica delle rette normali ad una superficie, che è quella di formare due sistemi di superficie sviluppabili ortogonali fra loro.

L'equazione

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0,$$

già ottenuta nell'art. X, mostra che quando le $x,\ y,\ z$, anzichè essere variabili indipendenti (come ivi si è presupposto), dipendono da due parametri u e v, non vi sono che due direzioni secondo le quali si passa dal punto (u, v) ad un punto contiguo della superficie iniziale, in modo che la retta corrispondente al primo punto sia incontrata da quelle che immediatamente le succedono in queste due direzioni. Dunque le rette di ogni sistema semplice formano due serie di superficie sviluppabili, le quali determinano sulla superficie iniziale due famiglie di curve. Non nuoce alla generalità dei risultati il supporre che queste curve sieno le stesse $u,\ v$. In quest'ipotesi si hanno le due relazioni

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dalla prima di queste, scritta sotto la forma

$$\left(Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial u} + \left(Z\frac{\partial x}{\partial u} - X\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial Y}{\partial u} + \left(X\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

e dalla

$$X\frac{\partial X}{\partial u} + Y\frac{\partial Y}{\partial u} + Z\frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

si deduce facilmente, indicando con H un fattore da determinarsi e ricordando le (7),

$$H\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - UX,$$

$$H\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} - UY,$$

$$H\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} - UZ.$$

Dalla seconda si ottiene analogamente

$$K\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} - VX,$$

$$K\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} - VY,$$

$$K\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} - VZ.$$

Sommando i quadrati delle prime tre equazioni, i prodotti delle prime colle seconde (membro a membro), ed i quadrati delle seconde, si ottengono le formole

$$H^2\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2\right] = E - U^2,$$

$$HK\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right) = F - UV,$$

$$K^2\left[\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2\right] = G - V^2.$$

I due fattori H e K non possono essere nulli ad un tempo, poichè in tale ipotesi si ricaverebbe dalle precedenti tre equazioni

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = (U\,du + V\,dv)^2,$$

risultato che non può verificarsi per alcuna superficie propriamente detta.

Dalle due prime terne di equazioni si deduce inoltre

$$H\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right) = \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$K\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right) = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Dunque se le rette sono normali ad una medesima superficie, si deve avere, *in forza della* (9),

$$(H - K)\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right) = 0.$$

Ora è facile riconoscere che affinchè sussista quest'ultima equazione, bisogna che sia nullo il secondo fattore. Se H è differente da K, ciò è evidente. Nel caso che H sia

eguale a K, basta osservare che alla superficie assunta come iniziale si può sostituirne un'altra qualunque. Facendo questa sostituzione, le $X,\ Y,\ Z$ rimangono le stesse, ma le $x,\ y,\ z$ diventano altre funzioni delle $u,\ v$. Ora è chiaro che in questo modo si può sempre rendere H differente da K. Per esempio, se si prendesse per nuova superficie iniziale l'inviluppo di una delle famiglie di superficie sviluppabili, tutte le rette del sistema sarebbero tangenti ad essa, epperò, chiamando $x',\ y',\ z'$ le sue coordinate, $H',\ K',\ U',\ V'$ i valori corrispondenti di $H,\ K,\ U,\ V$, si avrebbe

$$\frac{\frac{\partial x'}{\partial u}}{X} = \frac{\frac{\partial y'}{\partial u}}{Y} = \frac{\frac{\partial z'}{\partial u}}{Z} = \frac{X\frac{\partial x'}{\partial u} + Y\frac{\partial y'}{\partial u} + Z\frac{\partial z'}{\partial u}}{X^2 + Y^2 + Z^2} = U',$$

da cui

$$\frac{\partial x'}{\partial u} - U'X = 0,$$
$$\frac{\partial y'}{\partial u} - U'Y = 0,$$
$$\frac{\partial z'}{\partial u} - U'Z = 0,$$

e quindi $H' = 0$. In questo caso è certo che K' non potrebbe esser parimente uguale a zero, e perciò non si avrebbe $H' = K'$.

Dunque l'ipotesi che le rette sieno tutte normali ad una medesima superficie conduce necessariamente alla condizione

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0.$$

Ciò posto consideriamo una sfera di raggio 1, col centro nell'origine delle coordinate, e immaginiamo condotti i raggi paralleli alle rette del sistema. A ciascuna retta corrisponde in tal modo un punto della sfera avente per coordinate $X,\ Y,\ Z$; ed alle due famiglie di superficie sviluppabili corrispondono due famiglie di curve sferiche ($u = \text{cost.},\ v = \text{cost.}$), le quali, come è manifesto, formano in ciascun punto lo stesso angolo delle due superficie sviluppabili che si intersecano lungo la retta corrispondente a quel punto. L'equazione precedente esprime evidentemente che le due famiglie di curve sferiche sono ortogonali: dunque anche le anzidette due famiglie di superficie sviluppabili sono fra loro ortogonali, ossia *i due piani che passano per una retta qualunque e per le due rette infinitamente vicine dalle quali essa è incontrata sono perpendicolari fra loro*. È questa la proprietà caratteristica, enunciata per la prima volta da MONGE, nella Memoria citata all'art. X.

L'ultima equazione, combinata con una delle precedenti, dà

$$F = UV,$$

equazione semplicissima, che può tener luogo della (9) quando le curve u, v sieno quelle particolari di cui abbiamo fatto scelta.